

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥

## For Private and Personal Use Only



## PREFACE

In thus presenting to students and teachers a new elementary work in Urdu on the principles of Geometry, it can hardly be necessary to defend ourselves for having made Euclid's Elements the basis of the work. For while it cannot be denied that many defects and difficulties occur in the Elements, and that these become more obvious the more closely we examine the work, it must, on the other hand, be acknowledged that notwithstanding the numerous attempts which have been made by our best modern geometers to find an appropriate substitute, the "Elements" of Euclid has ever held the chief place in our Universities and Colleges, and is never likely to be superseded. Nearly every official programme of instruction or examination expressly includes some portion of this honoured work.

The present edition of Euclid's Elements is prepared especially for those studying for the Normal School Certificate and the Middle Class Vernacular Examination in the North-Western Provinces and Oudh. It differs in several important particulars from other editions of the same work intended to be used as text books in the Vernacular Schools of India. *First*, the style has been simplified as far

as possible by discarding much of the usual technical phraseology and in places where this has been necessarily retained, copious explanations have been added, especially in the Definitions. A list of all the technical terms used in the work, together with their English and Hindi equivalents, is also attached.

*Secondly* many new and simpler Demonstrations of the proposition have been given, in addition to those of Euclid, in order to bring the subject within the comprehension of different capacities. In not a few cases where Euclid has given only the indirect method of proof or what is called *Reductio ad absurdum*--(the method generally employed by Euclid for the demonstration of converse propositions)--a direct method of proof is more satisfying and more

convincing to the student has been appended. *Thirdly* to almost all the propositions, there have been added new Corollaries, Exercises and Annotations of various kinds, tending to render the additions a species of short running commentary on the immortal work of Euclid.

*Fourthly*, in order to remove one of the most practical objections which have been urged against the Elements, namely, its want of methodical arrangement, a classified index has been appended by means of which the propositions in the Elements relating to any particular subject may be immediately found.

In conclusion we must not omit to mention the principal works which have been consulted, and to which the present edition is mainly indebted for any advantage which it may possess over its rivals in the same field. The works referred to are the edition of the Elements by Todhunter, Potts, Wallace, Playfair, Smith and Law.

It only remains for us to offer our thanks to the friends who have helped us with their advice in the preparation of this work, and to assure each student and teacher that any suggestion for its improvement will be thankfully received by us.

ALIGARH, October 1894

A. R.



## इस्तिलाह

अंगरेजी	हिन्दी	उर्दू
<i>Definitions</i>	परिभाषा	حدود
<i>Dimension</i>	विस्तार	امتداد
<i>Point</i>	बिन्दु	نقطه
<i>Locus</i>	निधि	مقام النقطه
<i>Line</i>	रेखा	خط
<i>Straight line</i>	सीधी या सरल रेखा	خط مستقیم
<i>Parallel straight line</i>	समानान्तर सीधी रेखा	خطوط مستقیم متوازیه
<i>Curve</i>	बक्र या कुटिल रेखा	خط منحنی
<i>Superficies</i>	धरातल	سطح
<i>Plane superficies</i>	दर्पणोदर धरातल	سطح مستوی
<i>Solid</i>	पिंड	جسم
<i>plane angle</i>	कोण	زاویه مسطحه
<i>plane rectilincal angle</i>	सरल कोण	زاویه مسطحه مستقیم الخطین
<i>Right angle</i>	सम कोण	زاویه قائمه
<i>Obtuse angle</i>	अधिक कोण	زاویه منفرجه
<i>Acute angle</i>	न्यून कोण	زاویه حاده
<i>Re-entering angle</i>	पुनर्युक्त कोण	زاویه مکوره
<i>Adjacent angle</i>	आसन्न कोण	زاویه متصله
<i>Interior Angle</i>	अन्तः कोण	زاویه داخله
<i>Exterior angle</i>	बहिः कोण	زاویه خارجه
<i>Opposite angle</i>	सम्मुख कोण	زاویه متقابله
<i>Alternate angles</i>	एकान्तर कोण	زاویه متبادله
<i>Supplement</i>	पूरक	تكمه
<i>Complement</i>	कोटि	اعامی قائمه
<i>Vertex</i>	शीर्ष	رأس
<i>Arm</i>	भुज	ساق
<i>perpendicular</i>	लम्ब	عمود
<i>Boundary</i>	सीमा	حد

( ३ )

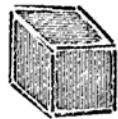
अंगरेजी	हिन्दी	उर्दू
Figure	व्याकृति या चित्र	شکل
Circle	वृत्त	دائره
Circumference	परिधि	محیط
Centre	केन्द्र	مرکز
Diameter	व्यास	قطر
Radius	व्यासार्ध या त्रिज्या	نصف قطر
Arc	चाप	قوس
Chord	चाप कर्ण या जीवा	وتر قوس
Side	भुज	ضلع
Rectilineal figure	ऋजु भुज चित्र	شکل مستقیم الاضلاع
Triangle	त्रिभुज	مثلث
Equilateral triangle	समत्रिबाहु त्रिभुज	مثلث متساوي الاضلاع
Isosceles triangle	समद्विबाहु त्रिभुज	مثلث متساوي الساقين
Scalene triangle	विषमबाहु त्रिभुज	مثلث مختلف الاضلاع
Right-angled triangle	समकोण त्रिभुज	مثلث قائم الزاوية
Hypotenuse	समकोण त्रिभुज का कर्ण	وتر مثلث قائم الزاوية
Obtuse-angled triangle	अधिक कोण त्रिभुज	مثلث منفرج الزاوية
Acute-angled triangle	न्यूनकोण त्रिभुज	مثلث حادة الزاوية
Quadrilatera figure	चतुर्भुज चित्र	شکل خواربعة الاضلاع
Square	वर्ग	مربع
Oblong	आयत या जात्यायत	مستطیل
Rhombus	विषमकोण समचतुर्भुज	معین
Rhomboid	अजात्यायत	شبيه بالمعین
Parallelogram	समानान्तर चतुर्भुज	متوازي الاضلاع
Trapezium	विषम चतुर्भुज	منحرف
Complement	पूरक	متمم
Trapezoid	समलम्ब चतुर्भुज	خوارقعة
Polygon	बहुभुज चित्र	شکل كثير الاضلاع

(५)

ओ३म्

# भूमिका

पत्थर का टौल जो किसी चट्टान से काटा गया है एक ठोस चीज़ है जब संगतराश ने इसको गढ़कर इसका डौल दुस्त कर लिया तो यह एक पिंडकी शक्त बन गई अब फ़क़्त करो कि यह शक्त ऐसी है कि इस टौल में वह तरफ़ें हैं जो आपसमें सब तरह से बराबर हैं अगर कोई शख्स खड़ा होकर इस टौल के एक कोने पर नज़र डाले तो उसकी तीन तरफ़ें जैसी कि इस तस्वीर में नज़र पड़ती हैं दिखलाई देंगी



इस शक्त की हर एक तरफ़ को धरातल कहते हैं और जब यह धरातल ऐसा हमवार और चिकना है कि इसमें कहीं खुरखुरापन नहीं है तो यह दर्पणोदर धरातल है

तेज़ और घेने किनारे जहां कोई दो तरफ़ें मिलती हैं रेखा कहलाती हैं

वह जगह जहां कहीं तीन किनारे मिलते हैं बिन्दु है

राशि उसे कहते हैं जिसके कुल और टुकड़ों की एक ही नाम से पुकार सकें मसलन् रेखा एक राशि है क्योंकि हम उसके कुल और उसके हर एक टुकड़े को रेखा कहते हैं

हर चीज़ की लम्बाई, चौड़ाई और मुटाई (या गहराई या उंचाई) को विस्तार कहते हैं

अब हम पिंड, धरातल, रेखा और बिन्दु के आपस का फ़क़्त इस तरह बयान करते हैं

पिंड में तीनों विस्तार होते हैं यानी लम्बाई, चौड़ाई और मुटाई

धरातल में दो विस्तार होते हैं यानी लम्बाई और चौड़ाई रेखा में एक विस्तार होता है यानी निरी लम्बाई

( ६ )

विंदु में कोई बिस्तार नहीं होता है  
 रेखागणित वह विद्या है जिसमें पिंडों, घरातलों, कोनों  
 और रेखाओं की पैमायश से बहस की जाती है और उनके  
 आपस के सम्बन्ध बयान होते हैं

उल्लेख्य एक बड़ा मशहूर गणितज्ञ था जिसने मुल्क मिश्र  
 में हज़रत ईसा के पेश्तर सन् ३२३ और २८३ के दर्मियान  
 शहरत पाई और स्कन्दरिया की गणित पाठशाला की बुनियाद  
 कायम की इसने रेखागणित की ऐसी तर्तीब दी कि इसका  
 नाम ही रेखागणित का दूसरा नाम हो गया

(७)

# रेखागणित

## पहिला अध्याय

### परिभाषा

यानी किसी चीज़ को खासियतों का ऐसा बयान कि उससे बड़ी चीज़ समझ में आवे

(१) बिन्दु वह है जिसकी कोई जगह सुकरर ही लेकिन उसके टुकड़े न हो सकें

टिप्पण किताबों में बिन्दु का यह निशान (•) है यह निशान कितना ही छोटा क्यों न हो तो भी इसके टुकड़े हो सकते हैं इससे यह न समझना चाहिये कि बिन्दु के जिसका बयान रेखागणित में हुआ है टुकड़े हो सकते हैं रेखागणित का बिन्दु एक ऐसे छोटे से टुकड़े की जगह के ख्याल को ज़ाहिर करता है जिसका बिस्तार हम गुमान में नहीं ला सकते हैं

(२) रेखा वह है जिसकी कोई जगह हो और जिसमें लम्बाई हो लेकिन चौड़ाई या मुटाई न हो

टिप्पण बिन्दु के किसी दशा में छपात करने से रेखा पैदा होती है और रेखा के समझने में ख्याल विधि सूचक लम्बाई और निषेध सूचक चौड़ाई का शामिल है रेखा दो तरह की यानी सीधी और झुटिल हो सकती है

(३) रेखा के सिरे बिन्दु होते हैं

टि० रेखा के सिरों से मुराद इस जगह रेखा के आदि अन्त से है जहाँ एक रेखा दूसरी रेखा को काटती है वहाँ भी बिन्दु होता है

(४) सरल या सीधी रेखा वह है जो अपने दोनों सिरों के बीच हमवार (यानी एक ही दिशा में) हो

टि० अगर बिन्दु बगैर अपनी दिशा के बदले हुए हरकत करे तो वह सीधी रेखा पैदा करेगा और अगर वह अपनी हरकत लगातार बदलता जाय तो उस हरकत से झुटिल या वक्र रेखा बनेगी इससे यह नतीजा निकलता है कि दो बिन्दुओं के हर्मिडान सिर्फ एक सीधी रेखा खींची जा सकती है

(८)

(५) धरातल वह है जिसकी कोई जगह हो और जिसमें लम्बाई और चौड़ाई हों लेकिन मुटाई न हो

टि० जहाँ एक धरातल दूसरे की काटता है वह रेखा है

(६) धरातल के किनारे रेखा है

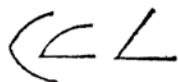
टि० दो सीधी रेखाओं की एक धरातल में होने की कृद् इस जगह पर इसलिये नहीं की गई है कि दो सीधी रेखा जो आपसमें मिलती है हमेशा एक ही धरातल में होती है

(७) समधरातल वा दर्पणोदर धरातल वह धरातल है कि जिसपर कोई दो बिन्दु लिये जाय और उन बिन्दुओं के बीच सीधी रेखा खींची जायती वह सीधी रेखा बिल्कुल धरातल में हो

टि० सम धरातल ठहरे हुए पानी या चिकने फर्श के धरातल के समान बिज्जुल चपटा और हमवार होता है

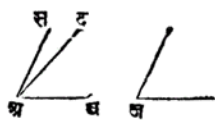
(८) कोन ऐसी दो रेखाओं के एक दूसरी तरफ़ के भुकाव को कहते हैं जो एक धरातल में आपसमें मिलती हैं लेकिन मिलकर एक रेखा नहीं बन जाती हैं

टि० कोन दो वक्र रेखा या एक वक्र रेखा और एक सीधी रेखा या दो सीधी रेखाओं के एक धरातल में मिलने से पैदा होता है जो मिलकर एक रेखा नहीं बन जाती है



(९) सरलकोन उस कोन को कहते हैं जो ऐसी दो सीधी रेखाओं के एक दूसरी की तरफ़ भुकाव से पैदा हो जो मिलकर एक सीधी रेखा नहीं बन जाती है

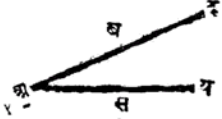
टि० (१) जब किसी बिन्दु पर एक ही कोन हो तो वह एक अक्षर से जो उसपर लिखा हुआ हो बयान हो सक्ता है जैसा कि कोन अ का है मगर जब एक बिन्दु पर एक से ज़्यादा कोने हों तो उनमें से हर एक कोन तीन अक्षरों से इस तरह बयान किया जाता है कि बीच का अक्षर बिन्दु पर लिखा हुआ होता है और एक अक्षर उन दोनों सीधी रेखाओं के जिनसे कोन बनता है किसी जगह पर लिखा होता है मसलन् जो कोन रेखा व अ और स अ से बनता है उसको व अ स कोन और जो कोन स अ और द अ रेखाओं से बना है उसको स अ द कोन और जो कोन व अ और द अ रेखाओं से बना है उसको व अ द कोन कहते हैं





(८)

टि० (२) जिस बिन्दु पर कोन बनाने वाली रेखा मिलती है उसको कोन का शीर्ष और उन रेखाओं में से हर एक को कोन की भुज कहते हैं विद्यार्थियों को याद रखना चाहिये कि जिन रेखाओं से कोन बनता है उनके घटने बढ़ने से कोन घटता बढ़ता नहीं है जैसे व अ स और द अ य एक ही कोन है



टि० (३) इस किताब में मूल रूप से सरल कोन की जगह सिर्फ कोन प्रयुक्त लिया जायगा

(१०) जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी होकर अपने आस पास के कोन जिन्हें आसन्न कोन कहते हैं बराबर बनावे तो उन कोनों में से हर एक कोन समकोन होगा और खड़ी सीधी रेखा की दूसरी सीधी रेखा पर लम्ब कहते हैं

टि० (१) समकोन की परिभाषा इस प्रकार भी की गई है कि वह समकोन का आधा है जिसके एक रेखा अपने किसी सिरे पर अगर वह रेखा उस सिरे की तरफ बढ़ाई जावे अपने बढ़े हुए हिस्से के साथ पैदा करती है और इस पिकले कोन को सीधा कोन कहते हैं

टि० (२) जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर लम्ब हो तो दूसरी सीधी रेखा भी पहली पर लम्ब होगी

(११) अधिक कोन वह कोन है जो सम कोन से बड़ा हो

टि० अधिक कोन दो सम कोन से छोटा भी होना चाहिये

(१२) न्यूनकोन वह कोन है जो समकोन से छोटा हो

टि० अगर किसी कोन का एक भुज कोन के शीर्ष की तरफ बढ़ाया जावे तो एक दूसरा कोन पैदा होगा यह कोन पहले कोन के बराबर या उससे छोटा या बड़ा होगा अगर बराबर है तो पहला कोन समकोन और अगर छोटा है तो अधिक कोन और जो बड़ा है तो न्यून कोन होगा

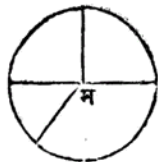
(१३) सीमा किसी चीज के किनारे को कहते हैं

(१४) क्षेत्र वह है जो एक या ज़्यादा सीमाओं से घिरा हो

(१५) वृत्त वह चित्र है जो एक रेखा से जिसका नाम परिधि

(१०)

है घिरा हो और जिसकी अन्दर एक खास बिन्दु  
ऐसा हो कि उससे जितनी सीधी रेखा परिधि  
तक खींची जावें सब आपसमें बराबर हों



(१६) वृत्त का केन्द्र एक ऐसा बिन्दु वृत्त

के अन्दर है कि उस बिन्दु से जितनी सीधी रेखा परिधि तक खींची जावें सब आपसमें बराबर हों

टि० वृत्तों को उनके केन्द्रों के नाम से ज्ञाहिर करना ग़ैर मामूली बात नहीं है मसलन् वृत्त जिसका म केन्द्र है उसको म वृत्त कहते हैं

(१७) वृत्त का व्यास वह सीधी रेखा है जो केन्द्र पर होकर जाय और जिसके दोनों सिरे परिधि पर हों

टि० जो सीधी रेखा वृत्त के केन्द्र से उसकी परिधि तक खींची जाती है उसको व्यासार्द्ध वा त्रिज्या कहते हैं

टि० (२) अगर एक सीधी रेखा अपने एक ठहरे हुए सिरे के गिर्द किसी धरातल में घूमकर अपनी असल जगह पर लौट आवे तो धरातल जिसपर यह रेखा घूमती है वृत्त कहलाता है और वह रेखा जो सीधी रेखा के दूसरे सिरे के बिन्दु की हरकत से पैदा हुई है वृत्त की परिधि कहलाती है और घूमने वाली सीधी रेखा वृत्त की त्रिज्या और ठहरे हुए सिरे के बिन्दु को वृत्त का केन्द्र कहते हैं

(१८) वृत्तार्द्ध वह क्षेत्र है जो व्यास और परिधि के उस भाग से घिरा हो जो व्यास से काटा है

टि० वृत्तार्द्ध का केन्द्र वही है जो वृत्त का केन्द्र है

(१९) धनुष क्षेत्र वह क्षेत्र है जिसकी किसी सीधी रेखा और परिधि के उस हिस्से ने जो उस सीधी रेखा से काटा है घिरा हो



टि० धनुष क्षेत्र का पहिले और दूसरे अध्याय में कहीं काम नहीं पड़ा है वृत्तार्द्ध धनुष क्षेत्र है लेकिन हर धनुष क्षेत्र वृत्तार्द्ध नहीं है

(२०) ऋजु भुज क्षेत्र वह क्षेत्र है जो सीधी रेखाओं से घिरा हो

टि० जिन सीधी रेखाओं से ऋजु भुज क्षेत्र घिरा होता है उनको उस क्षेत्र की भुज कहते हैं और जो जगह उन भुजों से घिरी होती है वह क्षेत्र का क्षेत्रफल या रकबा कहलाता है

(११)

(२१) त्रिभुज वह क्षेत्र है जो तीन सीधी रेखाओं से घिरा हो

टि० जिन सीधी रेखाओं से त्रिभुज घिरा होता है उनमें से एक को आसानी के लिये त्रिभुज का आधार और बाकी दो को त्रिभुज की भुज कहते हैं और उस बिंदु को जहाँ दोनों भुज मिलती है त्रिभुज का शीर्ष कहते हैं

(२२) चतुर्भुज वह क्षेत्र है जो चार सीधी रेखाओं से घिरा हो

(२३) बहुभुज वह क्षेत्र है जो चार से ज़ियादा सीधी रेखाओं से घिरा हो

टि० जिस बहुभुज क्षेत्र की सब भुजा और सब कोन आपसमें बराबर होते हैं उसको समान कोन सम भुज क्षेत्र कहते हैं

(२४) समतिबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसकी



तीनों भुजा आपसमें बराबर हों

(२५) समद्विबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसकी

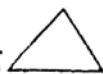


दो भुज आपसमें बराबर हों

टि० समतिबाहु त्रिभुज समद्विबाहु भी होता है लेकिन समद्विबाहु त्रिभुज समतिबाहु नहीं होसकता है

(२६) विषम बाहु त्रिभुज वह त्रिभुज है

जिसकी कोई एक भुजा दूसरी भुजा के बराबर न हो



(२७) समकोन त्रिभुज वह त्रिभुज है

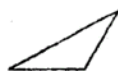
जिसका एक कोन समकोन हो



टि० समकोन त्रिभुज में समकोन के सामने वाली भुज को कर्ण और बाकी दो भुजाओं में से एक को आधार या भूमि और दूसरी को कोटि या लंब कहते हैं

(२८) अधिक कोन त्रिभुज वह त्रिभुज है

जिसका एक कोन अधिक कोन हो



(२९) न्यून कोन त्रिभुज वह त्रिभुज है जिसके

सब कोन न्यून कोन हों



टि० (१) न्यून कोन त्रिभुज में तीनों कोन न्यून कोन होने को कृद इसलिये रखी गई है कि समकोन त्रिभुज और अधिक कोन त्रिभुजों में

(१२)

(जैसा कि पहिले अध्याय की सत्रहवों साध्य की पढ़ने से मालूम होगा) दो हो कोन न्यूनकोन होते हैं

टि० (२) अगर त्रिभुज की सिर्फ भुजों पर खयाल किया जाय तो वह तीन किस्म का होता है यानी समबिबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज, और विषमबाहु त्रिभुज और तीन ही किस्म का उस सूरत में होता है जब उसके सिर्फ कोनों पर खयाल किया जाय यानी समकोन त्रिभुज, अधिक कोन त्रिभुज और रन्यूनकोन त्रिभुज फिर त्रिभुज की और भी किस्में हो सकती हैं जब उसकी भुजाओं और कोनों दोनों पर खयाल किया जाय

(३०) वर्ग क्षेत्र वह चतुर्भुज क्षेत्र है जिसकी चारों भुजा आपसमें बराबर हों और चारों कोन समकोन हों



टि० वर्गक्षेत्र की परिभाषा में एकही कोन का समकोन कहना काफी है क्योंकि जिस चतुर्भुज क्षेत्र की चारों भुजा आपसमें बराबर हों और एक कोन समकोन हो तो उसके सब कोन जैसा कि पहिले अध्याय की छियालीसवों साध्य में साबित हुआ है समकोन होते हैं

(३१) आयत क्षेत्र वह चतुर्भुज क्षेत्र है जिसके चारों कोन समकोन हों लेकिन उसकी सब भुजा आपसमें बराबर न हों



टि० जिस चतुर्भुज क्षेत्र की आमने सामने की भुजा बराबर हों और एक कोन समकोन हो उसको आयत या समकोन चतुर्भुज कहते हैं

(३२) विषमकोन सम चतुर्भुज वह चतुर्भुज क्षेत्र है जिसकी चारों भुजा आपसमें बराबर हों और उसके कोन समकोन न हों



(३३) अजात्यायत वा विषमकोन आयत वह चतुर्भुज क्षेत्र है जिसकी आमने सामने की भुजा आपसमें बराबर हों लेकिन सब भुजा आपसमें बराबर न हों और कोने भी समकोन न हों



(३४) इन चार चतुर्भुज क्षेत्रोंके सिवाय हर चतुर्भुज क्षेत्र को विषम चतुर्भुज क्षेत्र कहते हैं



टि० (१) कभी२ विषम चतुर्भुज जिसकी दो भुजा समानान्तर होती हैं समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है

(१३)

टि० (२) हर चतुर्भुज क्षेत्र को या तो चार अक्षरों से जो उसके चारों कोनों पर लिखे होते हैं या सिर्फ दो अक्षरों से जो उसके आमने सामने के कोनों पर लिखे होते हैं बयान करते हैं जैसा कि इस क्षेत्र को अब स द वा अ स वा ब द से बयान करते हैं



(३५) समानान्तर सीधी रेखा वह सीधी रेखा है जो एक धरातल में हों और दोनों तरफ बढ़ाई जाने से कभी एक दूसरी से न मिलें

टि० (१) इससे यह समझना चाहिये कि उस धरातल की जो समानान्तर रेखाओं के बीच में होता है चौड़ाई हर जगह समान होती है

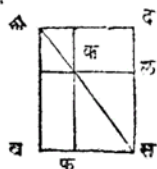
टि० (२) यह संभूति है कि दो सीधी रेखा जो एक दूसरी से कभी नहीं मिलें गो वह कितनी ही बढ़ाई जाय समानान्तर नहीं इसी सबब रेखाओं की एक धरातल में होने की क़ेद रक्खी गयी है

(अ) समानान्तर चतुर्भुज वह क्षेत्र है जिसकी आमने सामने की भुज समानान्तर हों और जो सीधी रेखा किसी समानान्तर चतुर्भुज के आमने सामने के कोनों के दमियान खींची जाती है उसको उस क्षेत्र का कर्ण कहते हैं



टि० (१) समानान्तर क्षेत्र वह है जिसके आमने सामने के भुज समानान्तर हों-समानान्तर क्षेत्र में ४, ६, ८ या युग्म संख्या के भुज हो सकते हैं जिसमें आमने सामने के हर दो भुज समानान्तर होते हैं

टि० (२) अगर समानान्तर चतुर्भुज अ ब स द का कर्ण अ स हो और य क फ और ज क ल रेखा समानान्तर चतुर्भुज की अ ब और अ द भुजों की समानान्तर हों तो उस समानान्तर चतुर्भुज में चार समानान्तर चतुर्भुज बनेंगे जिनमें से दो यानी अ ज क य और क फ स ल में कर्ण गुज़रता है और दो यानी य क ल द और ज ब फ क में कर्ण नहीं गुज़रता है जिन समानान्तर चतुर्भुजों में कर्ण नहीं गुज़रता है उनको अ ज क य और क फ स ल समानान्तर चतुर्भुजों का पूरक कहते हैं



## अवाधोपक्रम

टि०-अवाधोपक्रम वह वस्तुपपाद्य साध्य है जिसका सूत्र ऐसा साफ़ और जाहिर है कि सूत्र की जाणत नहीं रखता या देखना चाहिये कि उसने इस ने अवाधोपक्रम से काम लिफ़ा प्रमेयोपपाद्य साध्यों के लिये अमल करने या वस्तुपपाद्य साध्यों के हल करने में लिया है लेकिन उनका



(१४)

काम उन नाथों के उस हिस्से में जिसको सुवृत कहते हैं हरगिज़ नहीं लिया है और न उनसे सुवृत में किसी किस की मदद ली जा सकती है

**मानली**

१-किसी एक बिन्दु से किसी दूसरे बिन्दु तक रेखा खींच सकते हैं

टि०- हम खयाल करते हैं कि कोई सीधी रेखा हो नियत बिन्दुओं के दमियान जिनको हम उसके आदिअन्त समझे उपस्थित है तो उस सीधी रेखा को हम परिमित रेखा कहते हैं लेकिन जब हम उसके आदिअन्त को खयाल में नहीं लाते हैं तो वह सीधी रेखा अपरिमित कहलाती है

२- परिमित रेखा की उसकी सीध में चाहें जितना बढ़ा सकते हैं

टि० ( १ ) हर सीधी रेखा दोनों तरफ़ बिला किसी बड़ सुकररा के बढ़ सकती है इस अवध्योपक्रम की मदद से हम परिमित सीधी रेखा को उसके हर सिरे की तरफ़ जितना चाहें बढ़ा सकते हैं

टि० ( २ ) अवध्योपक्रम १, २ से एक सीधे मिस्तर (रूल) का काम में लाया जाना सुकृदम पाया जाता है यह ज़रूर नहीं है कि वह मिस्तर पैमायशी पैमानों या हिस्सों में बांटा गया हो कि उससे किसी लास लम्बाई की रेखा नापी जा सके

३- कि जिस केंद्र से और उस केंद्र से जिस दूरी पर चाहें वृत्त खींच सकते हैं

टि० इस अवध्योपक्रम कम्पास यांनी परकार का एक खास काम में लाना फ़र्ज़ करना यांनी यह कि उसके बसीले से सिर्फ़ वृत्त खींचे जाइज़ मान लिया गया है लेकिन यह इजाज़त हरगिज़ नहीं दी गयी है कि हम उसके बसीले से किसी दूरी को नापें या उस दूरी को एक सुक़ाम से दूसरे सुक़ाम पर ले आवें

## स्वयंसिद्धि

टि० स्वयंसिद्धि वह प्रमेयोपपाद साध्य है जिनमें सुवृत की गुंजायश नहीं है लेकिन जिनकी सच्चाई ऐसी ज़ाहिर है कि फ़ौरन मान लेनी पड़ती है किसी प्रमेयोपपाद साध्य की सिर्फ़ इस वजह से कि वह ज़ाहिर बात है स्वयंसिद्धि न खयाल करना चाहिये उसको स्वयंसिद्धि खयाल करने के लिये यह भी ज़रूर है कि उसका सुवृत ऐसी दलीलों के बसीले से जिसकी बुनियाद ज़ियादा ज़ाहिर प्रमेयोपपाद साध्य पर है नहोसके क्योंकि यह सुनामिद है कि स्वयंसिद्धि की तादाद जहां तक सुमकिन है कम हो और इसी वजह से बीसवीं साध्य और बाज़र और साध्य गो वह साध्य दूसरी स्वयंसिद्धियों की तरह ज़ाहिर बातें हैं स्वयंसिद्धि में दाख़िल नहीं की गयी है सुफ़सखि तौर पर दलीलों में से साबित की गया है



(१५)

(१) जो चीज़ एक ही चीज़ की (या बराबर चीज़ों के) बराबर हों वह आपसमें भी बराबर होती है

टि० वह स्वयंसिद्धि सब किस की राशियों से सम्बन्ध रखती है और यही बात स्वयंसिद्धि २, ३, ४, ५, ६, ७ और ८ पर मची आती है लेकिन स्वयंसिद्धि ८, १०, ११ और १२ सिर्फ रेखागणित की राशियों से सम्बन्ध रखती है

(२) अगर बराबर चीज़ों में (या एक ही चीज़ में) बराबर जोड़ा जाय तो बाद जोड़ने के जो चीज़ें हासिल होंगी वह भी आपसमें बराबर होंगी

(३) अगर बराबर चीज़ों में से (या एक चीज़ में से) बराबर निकाल लिया जाय तो बाद निकालने के जो चीज़ें हासिल होंगी वह भी आपसमें बराबर होंगी

(४) अगर नाबराबर चीज़ों में बराबर ज़ियादा किया जाय तो बाद ज़ियादा करने के जो चीज़ें हासिल होंगी वह भी ना बराबर होंगी

(५) अगर नाबराबर चीज़ों में से बराबर निकाल लिया जाय तो बाद निकालने के जो चीज़ें हासिल होंगी वह भी नाबराबर होंगी

(६) जो चीज़ें एक ही चीज़ की (या बराबर चीज़ों की) दूनी हों वह आपसमें बराबर होती हैं

(७) जो चीज़ें एक ही चीज़ की (या बराबर चीज़ों की) आधी हों वह आपसमें बराबर होती हैं

(८) जो राशें एक दूसरी को ढक लेती हैं यानी एक ही जगह घेरती हैं वह आपसमें बराबर होती हैं

टि० (१) इसके बिलोम का इस्तेमाल भी यानी बराबर राशि जब एक दूसरी पर एक ही तौर पर रक्खी जाय तो एक दूसरी को ढक लेती हैं उकलैदस ने किया है

टि० (२) एक राशि पर दूसरी राशि को रखने को मसलन् एक रेखा को दूसरी रेखा पर या एक कोन को दूसरे कोन पर या एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर या एक वृत्त को दूसरे वृत्त पर वगैरह रखने को आच्छादन कहते हैं आच्छादन जो रेखागणित में इस्तेमाल हुआ है सिर्फ खयाली है यानी यह कि हम दिल में खयाल करते हैं कि एक राशि दूसरी राशि पर रक्खी गयी है और तब अगर हम साबित कर सकें कि वह राशि एक दूसरी को पूरा ढक लेती है यह नतीजा निकालते हैं कि वह राशि आपसमें बराबर है मसलन् अगर दो सीधी रेखा एक दूसरी पर इस तरह रक्खी जाना खयाल करें कि एक के दोनों सिरे दूसरी के दोनों सिरे

(१६)

भर पड़ें तो बह सौधी रेखा आपसमें बराबर होती हैं और अगर दो कोनों को हम एक दूसरे पर इस तरह अपने दिल में रख सकें कि एक का शीर्ष दूसरे के शीर्ष पर हो और एक की भुजों की दिशाएं भी दूसरे की भुजों की दिशाओं पर पड़ें तो वह कोन आपसमें बराबर होते हैं क्योंकि भुजों की लम्बाई के घटने बढ़ने से जैसा कि हम नवीं परिभाषा में बयान कर चुके हैं कोन घटता बढ़ता नहीं है अगर दो धरातलों का एक दूसरे पर इस तरह रखे जाना खयाल करें कि एक की भुजों की दिशाएं और लम्बाई दूसरे की भुजों की दिशाओं और लम्बाइयों को पूरा-एक लेवे तो वह धरातल आपसमें बराबर होते हैं

टि० ३- यह खयंसिद्धि रेखागणित सम्बन्धी बराबरी दर्शाफ्त करने की कसौटी है और इसमें और अङ्गगणित सम्बन्धी बराबरी के कांटे में बहुत बड़ा फर्क है रेखागणित सम्बन्धी दो राशि उस सूरत में बराबर होती हैं जब वह एक दूसरी को एक लेवें या एक सकें और दो संख्या उस सूरत में बराबर होती हैं जब उन दोनों में इकाइयों के योग एकसे हों और चूंकि उकलैदस न रेखाओं, कोनों या धरातलों वगैरह की राशियों की कोई इकाई सुकरूर नहीं की है इसलिये रेखागणित सम्बन्धी राशि की बराबरी के सुवूत में संख्या से काम लेना जायज नहीं है

(८) कुल अपने टुकड़े से बड़ा होता है

टि० १- डाक्टर टामसन ने अपनी उकलैदस में इस खयंसिद्धि के साथ यह खयंसिद्धि ज़ियादा की है कि कुल अपने सब हिस्सों के योग के बराबर होता है हम यह खयंसिद्धि भी ज़ियादा कर सकते हैं कि हिस्से का हिस्सा कुल का भी हिस्सा होता है

टि० २- नवीं खयंसिद्धि ज़ाहिरा आठवीं की उलटी है यानी यह कि दो राशि जिनमें से एक दूसरी से बड़ी हो एक दूसरी को एक नहीं सकती है

(१०) दो सौधी रेखा धरातल को नहीं घेर सकती

टि० १- इसके यह मानी है कि दो सौधी रेखा जिनमें से एक के कोई दो बिन्दु दूसरी के दो बिन्दुओं पर पड़ें वे एक दूसरी को सरासर एक खेंगें यहां तक कि बढ़ाई जाने पर भी एके रहेंगी

टि० २- सौधी रेखा की ख़ासियत जो हमने खयंसिद्धि १० में बयान की है सौधी रेखा की परिभाषा ही से ज़ाहिरा टपकती है क्योंकि अगर दो सौधी रेखाओं का जगह को घेरना मुमकिन होता तो वे अपने सिरे के बिन्दुओं के दर्मियान एक दूसरी को पूरा-एक नहीं एक सकतीं

टि० ३- धरातल के घेरने के लिये कम से कम तीन सौधी रेखाओं का होना जरूर है

(११) सब समकोन आपसमें बराबर होते हैं

(१७)

टि० १- क्योंकि कोन एक किसम की राशि है इसलिये यह स्वयंसिद्धि आठवीं स्वयंसिद्धि को एक खास मूरत है

टि० २- कहा जाता है कि यह स्वयंसिद्धि एक प्रमेयोपपाद साध्य है और सुबूत इसका इस तरह हो सक्ता है कि कुल सीधे कोन क्योंकि वे आच्छादन से एक दूसरे पर रखे जासक्ते हैं और एक दूसरे को एक सत्ते हैं आपसमें बराबर होते हैं (स्वयंसिद्धि ५) लेकिन समकोन सीधे कोन का आधा होता है (परिभाषा १०) और बराबर चीजों के आधे आपसमें बराबर होते हैं (स्वयंसिद्धि ७) इसलिये कुल समकोन आपसमें बराबर होते हैं

(१२) अगर एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं से मिलकर अपनी एक तरफ़ दो अन्तः कोन ऐसे ऐसे पैदा करे कि वह दोनों कोन मिलकर दो समकोन से छोटे हों तो वह दो सीधी रेखा लगातार बढ़ाई जाने से कहीं न कहीं उस तरफ़ में मिल जायगी जिस तरफ़ के कोन दो समकोन से छोटे हैं

टि०- यह स्वयंसिद्धि पहले अध्याय की सचहवीं साध्य का विलोम है और ऐसी ज़ाहिर बात नहीं है जिसके साबित करने के लिये दलील की ह्राजत न हो जो श्रुत कुल स्वयंसिद्धियों के लिये ज़रूर है इस स्वयंसिद्धि के बदले प्लेफ़िअर साहब ने अपनी किताब में यह स्वयंसिद्धि लिखी है “अगर दो सीधी रेखा एक बिन्दु पर एक दूसरी को काटती हों तो वह दोनों रेखा किसी एक ही रेखा की समानान्तर नहीं हो सकती हैं” लेकिन यह स्वयंसिद्धि भी एतराज़ से खाली नहीं है क्योंकि यह पहले अध्याय की तीसवीं साध्य का एक ज़ाहिर नतीजा है

## रेखागणित की साध्यों का वर्णन

साध्य वह है जिसमें किसी चीज़ के बनाने या किसी सिद्धान्त के साबित करने की ग़रज़ बयान की जाय और जब साध्य के यह भागी हैं तो उसकी दो किस्में हैं वस्तूपपाद (सोपपाद) और प्रमेयोपपाद (उपपाद) हर साध्य में कुछ चीज़ें या सिद्धान्त दिये हुए होते हैं और उनसे कुछ-दर्याफ़्त करने का बयान होता है अगर दर्याफ़्त करने से किसी चीज़ के बनाने का मतलब है तो उसको वस्तूपपाद साध्य कहते हैं और अगर दर्याफ़्त करने से किसी सिद्धान्त के सिद्ध करने का मतलब है तो उसको प्रमेयोपपाद साध्य कहते हैं वस्तूपपाद साध्य में दी हुई चीज़ों को निर्दिष्ट और जिन चीज़ों को बनाना चाहते हैं उनको करणीय और प्रमेयोपपाद साध्य में दिये हुए सिद्धान्त को कल्पितअर्थ और जो सिद्धान्त उनसे साबित करना चाहते हैं उसको फ़ल कहते हैं

रेखागणित की साध्य में ज़ियादा से ज़ियादा छः दिखे हुए करते हैं

(१८)

१ साधारण सूत्र (दावा आम) जिसमें साध्य को शर्तें आम और पर वयान की जाती हैं

२ विवरण सूत्र (दावा खास) जिसमें एक खास शक्ति खींचकर उस पर सूत्र की शर्तें वयान करके जाहिर करते हैं

३ इच्छाप्रकाश (इजहारमुद्दा) अपने अमली मतलबको वयान करना कि हम यह बनाना या साबित करना चाहते हैं और उसपर सारा ध्यान देना

४ अंकन या कृत (अमल) साध्य के हल करने या साबित करने के लिये अवाध्योपक्रम के अनुसार ज़रूरी रेखाओं या वृत्तों को खींचना

५ उपपत्ति (सुबूत) दलीलों के मिलाने से दावे को हल करना या साबित करना यानी यह दर्शाएँ कि दावा हमारा सही था या गलत था जो मतलब हमारा था उसका हासिल होना सुमकिन है या नहीं

६ फल (नतीजा) जिसमें दावे को फिर वयान करके जाहिर करना कि जो चीज़ हमको बनानी थी या जो बात हमको साबित करनी थी वह बन गई या साबित होगई

इस किताब में संचेप के लिये नीचे लिखे संकेत काम में लाये जायंगे:

परिभाषा के लिये

प०

अवाध्योपक्रम के लिये

अवा०

स्वयंसिद्धि के लिये

स्व०

दूसरे अध्याय की तीसरी साध्य के लिये

अ० १ सा० ३

## सवालात इम्तिहान

(१) रेखागणित की परिभाषा लिखो

(२) रेखागणित में किन किन चीज़ों से बहस की जाती है

(जवाब) बिन्दु, रेखा, धरातल, पिंड से

(३) बिन्दु में क्या चीज़ अवश्य की है (जवाब) जगह

(४) रेखा की तारीफ़ करो और बताओ कि रेखा की प्रकार की होती है

(५) रेखा कैसे बनती है और साबित करो कि दो रेखाओं के काटने से बिन्दु पैदा होता है

(६) धरातल के बिस्तार बताओ और बताओ धरातल के तरह का होता है

(७) जब एक धरातल दूसरे धरातल को काटता है तो कौनसी राशि रेखागणित की पैदा होती है

(८) सम धरातल किस तरह से बनता है (जवाब) जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा को काटे और उस पर गुज़रती हुई अपनी सीध को बिना बदले हरकत करे तो उससे सम धरातल बनता है

(१८)

(६) सम धरातल में बिन्दु की जगह नियत करने के वास्ते कितनी शर्तों की ज़रूरत है (जवाब) दो की क्योंकि बिन्दु सिर्फ दो वक्त, या सीधी रेखाओं के एक दूसरे के कटने से पैदा होता है

(१०) रेखा का स्थान सुक्रर करने के लिये कितनी शर्तों की ज़रूरत है (जवाब) दो की यानी दो बिन्दु जिसमें होकर वह गुज़रता है या एक बिन्दु जिसमें होकर वह गुज़रता है और एक रेखा जिसकी वह समानान्तर या लम्ब आदि हो

(११) सरल कोन की तारीफ़ करो और यह भी बताओ कि उसकी तारीफ़ में लफ़्ज़ “एक ही धरातल में हो” जो रेखागणित के दर्पणोद्घार कान की तारीफ़ में क्यों उड़ा दिये गये

(१२) दो या तीन कोनों को जो एक ही बिन्दु व पर हैं किस तरह जाँच कर सकते हैं और एक कोन को जो एक बिन्दु पर है किस तरह पर बयान करते हैं

(१३) वृत्त और केन्द्र की तारीफ़ करो

(१४) वृत्त के बयान में किन किन शर्तों का होना ज़रूरी है (जवाब) तीन यानी केन्द्र को जगह कि जिसके लिये दो शर्तों का होना ज़रूरी है तीसरे त्रिज्या की लम्बाई

(१५) वृत्तार्ध और धनुष क्षेत्र में क्या फ़र्क है

(१६) त्रिभुज की तारीफ़ करो और बताओ कि अगर त्रिभुज की भुज और कोनों पर खयाल किया जावे तो उसकी कितनी किस्में हो सकती हैं

(१७) चतुर्भुज क्षेत्र की किस्में बयान करो

(१८) वर्ग, विषम कोन, सम चतुर्भुज, और वर्ग, आयत और आयत अजात्यायत और विषम कोन समचतुर्भुज, अजात्यायत में किन किन बातों में एकता है और कौन कौनसी बातों में विरोधता है

(१९) दो सीधी रेखा जो दोनों तरफ़ बढ़ाई जाने से कभी एक दूसरी से नहीं मिलती हैं हर सूरत में समानान्तर नहीं होती हैं इसकी कोई आम मिसाल दो

(२०) इन चतुर्भुज क्षेत्रों को जिनका बयान रेखागणित की ३०, ३१, ३२, ३३ परिभाषा में हुआ है किस एक खास नाम से पुकार सकते हैं

(जवाब) समानान्तर चतुर्भुज

(२१) अवाध्योपक्रम और स्वयंसिद्धि में क्या फ़र्क है

(२२) रेखागणित की तीसरी अवाध्योपक्रम ने कौनसी बात मान ली गई है और रेखागणित की तीन स्वयंसिद्धियों को जो राश्यों की बराबरी से सम्बन्ध रखती हैं बयान करो

(२३) रेखागणित में राश्यों की बराबरी की क्या जाँच है—रेखागणित की उन स्वयंसिद्धियों को जो सीधी रेखा और समकोन से सम्बन्ध रखती हैं बयान करो



(२०)

(२४) रेखागणित की वह खरंमिद्धि बयान करो कि जो ऐसी रेखाओं से सम्बन्ध रखती हो जो बढ़ाने से मिलजाती हैं

(२५) क्या रेखागणित में कुछ खरंमिद्धि ऐसी है जिनका नाम खरंमिद्धि रखना सनामिव नहीं है

(२६) आच्छादन क्रिया किसे कहते हैं क्या आच्छादन क्रिया की रेखागणित में कोई खास ज़रूरत है

(२७) साध्य की तारीफ़ करो, साध्य वस्तूपपाद्य और प्रमेयोपपाद्य का फ़र्क बताओ

(२८) साध्य सूत्र किसे कहते हैं और वस्तूपपाद्य और प्रमेयोपपाद्य में कौनसे दो हिस्से होते हैं मिसाल देकर बयान करो

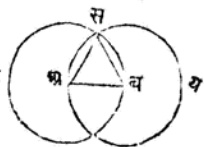
## साध्य १ वस्तूपपाद्य

साधारण सूत्र दो ज़ईपरिमिति सीधी रेखाओं पर सम-  
त्रिबाहु त्रिभुज बनाओ

विवरणसूत्र फ़र्ज़ करो कि अ व दो ज़ई सीधी रेखा है  
अ व पर समत्रिबाहु त्रिभुज बनाना है

अंकन अ केंद्र से अ व दूरी पर व स दृष्ट  
वृत्त खींचो

अवा० ३



अवा० ३

स बिन्दु से जिसपर एक वृत्त दूसरे को काटता है अ और व बिन्दुओं तक स अ और स व सीधी रेखा खींचो

अवा० १

तो अब स समत्रिबाहु त्रिभुज होगा

उपपत्ति चूँकि अ केंद्र व स दृष्ट वृत्त का है

इसलिये अ स बराबर है अ व के

प० १५

और चूँकि व केंद्र अ स य वृत्त का है

इसलिये व स बराबर है व अ के

प० १५

लेकिन साबित हो चुका है कि अ स बराबर है अ व के

इसलिये अ स और व स में से हर एक अ व के बराबर है

लेकिन जो चीज़ें एक ही चीज़ के बराबर हों वह सब आपसमें बराबर होती हैं

स० १

इसलिये अ स बराबर है व स के

इसलिये अ व और व स और स अ आपसमें बराबर ज़ह



(२१)

इसलिये अब स समत्रिबाहु त्रिभुज ज्ञा

प० २४

और वह दो जुड़े अब सीधी रेखा पर बन गया और इसी के बनाने की ज़रूरत थी

टि० इस साध्य में उक्तै इस ने इस स्वयंसिद्धि को मान लिया है कि जब एक वृत्त का केंद्र दूसरे वृत्त की परिधि में हो तो उस वृत्त का कुछ हिस्सा दूसरे वृत्त के अन्दर होगा और कुछ हिस्सा बाहर इसलिये उन वृत्तों की परिधि एक दूसरी को दो बिन्दुओं पर काटेगी चूंकि उन बिन्दुओं में से एक बिन्दु दो जुड़े रेखा के एक तरफ़ और दूसरा दूसरी तरफ़ होगा इसलिये दो समत्रिबाहु त्रिभुज उस रेखा पर बनेंगे और दोनों त्रिभुज मिलकर एक विषमकोन समचतुर्भुज बन जायगा जिसका कर्ण दो जुड़े रेखा होगी

### अभ्यास

(१) पहिली साध्य में अगर अब दोनों तरफ़ इतना बढ़ाया जाय कि वह वृत्तों से बिन्दु द और य पर मिले और स द और स य मिलाए जाय तो साबित करो कि त्रिभुज स अ द और स ब य समद्विबाहु त्रिभुज हैं

(२) दो जुड़े परिमित सीधी रेखा पर एक रेखा समद्विबाहु त्रिभुज बनाओ जिसकी हर एक भुजा दो जुड़े रेखा से दूनी हो

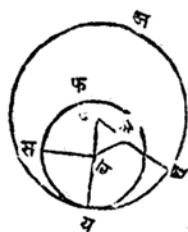
### साध्य २ वस्तूपपाद्य

सा० सूत्र—दिये हुए बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो दो जुड़े सीधी रेखा के बराबर हो

वि० सूत्र—फ़र्क करो कि अ दिया ज्ञा बिन्दु और व स दो जुड़े रेखा है

अ से व स की बराबर एक सीधी रेखा खींचनी है

अं०—अ से व तक सीधी रेखा खींची



और उस पर समत्रिबाहु त्रिभुज अ द व बनाओ

सा० १

व केन्द्र से व स दूरी पर स य फ़ वृत्त खींची

अवा० ३

द व को य तक बढ़ाओ

अवा० २

द केन्द्र से द य दूरी पर य ज ह वृत्त खींची

अवा० ३

द अ को ह तक बढ़ाओ

अवा० २

तो अ ह बराबर होगी व स के

(२२)

उप०— चूँकि स य फ़ वृत्त का व केन्द्र है

इसलिये व स बराबर है व य के

परि० १५

और चूँकि य ज ह वृत्त का द केन्द्र है

इसलिये द ह बराबर है द य के

परि० १५

और इनके हिस्से द अ और द व बराबर हैं

परि० २४

इसलिये बाकी हिस्सा अ ह बराबर है बाकी हिस्से  
व य के

ख० ३

लेकिन साबित हो चुका है कि व स बराबर है व य के

इसलिये अ ह और व स में से हर एक बराबर है व य के

लेकिन जो चीज़ें एक ही चीज़ के बराबर हों वह सब आपसमें  
बराबर होती हैं

ख० १

इसलिये अ ह बराबर है व स के

इसलिये अ ह सीधी रेखा दिये हुए बिंदु अ से दी हुई व स  
सीधी रेखा के बराबर खिंच गयी और इसी रेखा के खींचने की  
ज़रूरत थी

टि० ( १ ) इस प्रकृत में जब दिया हुआ बिन्दु न तो दी हुई रेखा में हो  
और न उस रेखा की सीध में हो तो इस प्रकृत की आठ सूरतें पैदा होंगी  
यानी एक ही बिन्दु से आठ रेखा आठ तरफ़ खिंच सकती हैं

१- दी हुई रेखा के दो सिरे हैं और दिये हुए बिंदु को हर सिरे से  
मिलाने के लिये एक रेखा खींची जा सकती है

२- हर मिलाने वाली रेखा की हर तरफ़ समतिबाहु त्रिभुज बन सकता है

३- समतिबाहु त्रिभुज की वह भुजा जो प्रकृत में पहले बढ़ायी जाती है  
अपने हर सिरे की तरफ़ बढ़ सकती है

लेकिन जब दिया हुआ बिंदु दी हुई रेखा में या उसकी सीध में हो  
तो दो सूरतें जो बिन्दु को रेखा के हर सिरे के मिलाने से पैदा होती हैं  
एक हो जायंगी और इसलिये प्रकृत की सिर्फ़ चार सूरतें रह जायंगी

जब दिया हुआ बिंदु दी हुई रेखा के सिरे पर हो तो प्रकृत बहुत आसान  
है बिंदु के केन्द्र मानकर उस रेखा की दूरी पर वृत्त खींचो और रेखा को  
वृत्त की परिधि तक बढ़ाओ बढ़ा हुआ हिस्सा दी हुई रेखा के बराबर होगा

सुदरिस को चाहिये कि अपने लङ्कों से इस प्रकृत की सब सूरतें  
खिंचावे

(२३)

टि० (२) अमली तौर से हम इस श्रुति को इस तरह चल कर सकते हैं कि परकार से व स सीधी रेखा की लम्बाई नापें और फिर अगर परकार की एक शाख की नोक बिंदु अ पर रखें तो दूसरी शाख की नोक ऐसे बिंदु पर पड़ेगी तो सीधी रेखा जो बिंदु अ से उस बिंदु तक खींची जाती है व स सीधी रेखा के बराबर होगी मगर रेखागणित में इस तौर पर परकार के इस्तेमाल की इजाजत नहीं दी गयी है परकार का सिर्फ वही इस्तेमाल जायज़ समझा गया है जो अवाध्योपक्रम ३ में बताया हुआ है यानी हम उसके वमीले से एक वृत्त खींचें जिसकी परिधि एक दिये हुए बिंदु में होकर किसी दूसरे दिये हुए बिंदु के गिर्द जिसको हम केन्द्र कहते हैं गुज़रे यह खयाल करना चाहिये कि परकार के पर यानी शाख का गुज़ के धरातल पर से हटते ही फौरन अपने आप बन्द होजाते हैं कि किसी दूरी को हम उसके वमीले से एक जगह से दूसरी जगह पर नहीं ले जासकते परकार के इस ख्यास और मछडूद इस्तेमाल पर गौर करने से तालवइल्म को इस अध्याय की पहली तीन साध्यों की ज़रूरत मालूम होजायगी

### अभ्यास

(३) अगर दूसरी साध्य में छोटे वृत्त का व्यास बड़े वृत्त की त्रिज्या हो तो बताओ कि दिया हुआ बिंदु और बनाये हुए त्रिभुज का शीर्ष कहां होगा

(४) दी हुई परिमित सीधी रेखा पर ऐसा समदिबाहु त्रिभुज बनाओ जिसकी प्रत्येक भुज किसी दी हुई दूसरी रेखा के बराबर हो

### साध्य ३ वस्तुपपाद्य

सा० सूत्र दी हुई दो सीधी रेखाओं में से जो बड़ी हो उसमें से

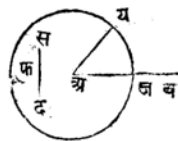
छोटी की बराबर हिस्सा काटो

वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि अब और सद दो

दी हुई सीधी रेखा हैं जिनमें अब बड़ी है

अब में से सद की बराबर एक हिस्सा

काटना है



अं० अब बिन्दु से सद के बराबर अय सीधी रेखा खींचो सा० २

अ केंद्र से अय दूरी पर य फज वृत्त अब सीधी रेखा की ज बिंदु पर काटता हुआ खींचो

अवा० ३

तो अज बराबर सद के होगी

(२४)

उप० चूंकि य फ ज वृत्त का अ केंद्र है इसलिये अ ज बराबर है अ य के

प० १५

लेकिन अ य बराबर स द के बनायी गई है

इसलिये अ ज और स द में से हर एक अ य के बराबर है

इसलिये अ ज बराबर है स द के

इसलिये अ व दी हुई बड़ी रेखा में से एक हिस्सा अ ज बराबर स द छोटी रेखा के काट गया और इसी हिस्से के काटने की ज़रूरत थी

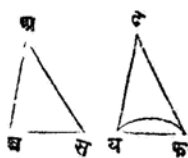
टि० इसी प्रकार से हम दो छोटी बड़ी रेखाओं में से छोटी को इस कदर बढ़ा सकते हैं कि बढ़कर बड़ी के बराबर होजाय और एक ऐसी सीधी रेखा भी खींच सकते हैं जो दो सीधी रेखाओं के योग या अन्तर के बराबर हो

### साध्य ४ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र- अगर दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग २ बराबर हों और उन भुजों से बने हुए कोन भी आपस में बराबर हों तो उन त्रिभुजों के आधार यानी तोसरी भुज भी आपस में बराबर होंगी और दोनों त्रिभुज भी आपस में बराबर होंगे और एक त्रिभुज के बाकी कोन अलग अलग दूसरे त्रिभुज के बाकी कोनों के बराबर होंगे यानी वह कोन आपसमें बराबर होंगे जिनके सामने की भुज बराबर हैं

वि० सूत्र- फर्ज करो कि अब स और द य फ त्रिभुज हैं

अब स त्रिभुज की दो भुज अ व और अस अलग २ द य फ त्रिभुज की द य और द फ भुजों के बराबर हैं यानी अ व बराबर है द य के और अस बराबर है द फ के और व अस कोन बराबर है द य फ कोन के



तो व स आधार बराबर होगा य फ आधार के और अ व स त्रिभुज द य फ त्रिभुज के बराबर होगा और बाकी कोन जिनके सामने की भुज बराबर हैं अलग २ बराबर होंगे यानी अब स कोन बराबर

(२५)

बर हीगा दय फ कोन के और अस ब कोन बराबर हीगा द फ य कोन के

उप० क्योंकि अगर अ ब स त्रिभुज द य फ त्रिभुज के ऊपर इस तरह से रखा जाय कि ब बिंदु य बिंदु पर हो और अ ब सीधी रेखा द य सीधी रेखा पर

तो चूंकि अ ब बराबर है द य के ( बमूजिव फर्ज ) अ बिंदु द बिंदु पर पड़ेगा

और जब अ ब सीधी रेखा ने कुल द य सीधी रेखा को ढकलिया तो चूंकि ब अस कोन बराबर है य द फ कोन के इसलिये अ स सीधी रेखा द फ सीधी रेखा पर पड़ेगी

और चूंकि अस बराबर है द फ के ( बमूजिव फर्ज ) स बिंदु फ बिंदु पर पड़ेगा

लेकिन यह बयान हो चुका है कि ब बिंदु य बिंदु के ऊपर है इसलिये कुल ब स आधार कुल य फ आधार को ढकलिया

क्योंकि जब ब बिन्दु य पर हुआ और स बिन्दु फ बिन्दु पर अगर कुल ब स आधार कुल य फ आधार पर नहीं पड़ता है तो दो सीधी रेखा ब स और य फ एक धरातल को घेरेंगी और यह बात नासुमकिन है

स्व० १०

इसलिये कुल ब स आधार कुल य फ आधार पर पड़ता है और उसके बराबर है

और कुल अ ब स त्रिभुज कुल द य फ त्रिभुज पर पड़ता है और उसके बराबर है

और एक त्रिभुज के बाकी कोन दूसरे त्रिभुज के बाकी कोनों को पूरा पूरा ढक लेते हैं और उनके बराबर हैं यानी अ ब स कोन बराबर है द य फ कोन के और अस ब कोन बराबर है द फ य कोन के

फल इसलिये अगर दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के आयोपान्त—यही साबित करना था



(२६)

टि० (१) यह शक्त उस सूरत में भी सची मालूम देती है जबकि कोन जो एक त्रिभुज की दो भुजों से बना है वही हो जो दूसरे त्रिभुज की दो भुज से बना है जैसा कि त्रिभुज फ अ स और ज अ व में है (५ वीं साध्य देखो) या जबकि त्रिभुजों में आधार उभयनिष्ठ हो जैसा कि त्रिभुज फ व स और ज स व में है (५ वीं साध्य देखो) या जबकि त्रिभुजों में एक भुज उभयनिष्ठ हो

टि० (२) इस साध्य के सूत्र में आच्छादन की क्रिया को काम में लाये हैं और आठवीं स्वयंसिद्धि के विलोम को मान लिया है—आच्छादन क्रिया से बराबरी दर्याफ़्त करने के लिये इस स्वयंसिद्धि के मान लेने की ज़रूरत है कि हर शक्त को धरातल पर बग़ैर उसकी सूरत और डोलत डूलील किये हुए एक जगह से हटाकर दूसरी जगह पर रख सक्ते हैं और धरातल में उसको लौट सक्ते हैं इस बात का मान लेना भी ज़रूर है कि अगर एक सीधी रेखा के दो बिन्दुओं के दर्मियान का हिस्सा दूसरी सीधी रेखा के दर्मियान के हिस्से पर पड़ता है तो उस सीधी रेखा के बाकी हिस्सों की दिशाएँ भी एक दूसरी पर पड़ती हैं

टि० (३) हर त्रिभुज में कुछ राशि होती है या तीन भुज और तीन कोन और (सिवाय दो खास सूरतों के) जब इन कुछ राशियों में से कोई तीन दी हों तो बाकी तीन दर्याफ़्त होसक्ती हैं और त्रिभुज मालूम हो सक्ता है इसलिये अगर दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की तीन राशि जिनसे त्रिभुज मालूम होसक्ता है दूसरे त्रिभुज की उन्हीं तीन राशियों के अलग२ बराबर हों तो यह साबित होसक्ता है कि त्रिभुज भी आपस में बराबर होंगे इस तीन राशियों की कुछ सूरतें होसक्ती हैं और वह यह हैं

१ तीन कोन

२ तीन भुज

३ दो भुज और उनसे बना हुआ कोन

४ दो भुज और उनमें से एक भुज के सामने का कोन

५ दो कोन और उनके बीच की भुज

६ दो कोन और उनमें से एक कोन के सामने की भुज

पहिली सूरत उन दो सूरतों में से है जिनमें त्रिभुज नहीं दर्याफ़्त होसक्ता है क्योंकि त्रिभुज की भुज बग़ैर कोने के घटने बढ़ने के घट बढ़ सक्ती है दूसरी सूरत इस अध्याय की आठवीं साध्य में साबित हुई है तीसरी सूरत इस साध्य में साबित हुई है

चौथी सूरत में भी त्रिभुज ठीक२ नहीं मालूम हो सक्ता है क्योंकि यह सुमकिन है कि एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग२ बराबर हों और एक भुज के सामने का कोन भी बराबर हो दूसरे त्रिभुज के एक कोन के जो पहली भुज के बराबर भुज के सामने है लेकिन त्रिभुज आपस में बराबर न हों



(२७)

मसलन फ़र्ज करो कि अदस एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी अद और अस भुज आपस में बराबर हैं सद को किसी व बिन्दु तक बढ़ाओ और अव मिलाओ अब यह ज़ाहिर है कि अवस और अवद त्रिभुजों में अव और अस भुज तो बराबर हैं अव और अद भुजों के और व कोन जो बराबर भुजों अस और अद के सामने है दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ है लेकिन त्रिभुज आपस में बराबर नहीं हैं



पाँचवीं और छठी सूत्रों इस अध्याय की द्वाबीसवीं साध्य में साबित हुई हैं

### अभ्यास

(५) अगर दो वर्ग क्षेत्र की एक भुज दूसरे वर्ग क्षेत्र की एक भुज के बराबर हो तो वह दोनों वर्ग क्षेत्र सब तरह से आपस में बराबर होंगे

(६) सम द्विबाहु त्रिभुज के किसी कोन को दो बराबर हिस्सों में बाँटती हुई रेखा उस कोन के सामने की भुज को भी दो बराबर हिस्सों में बाँटेगी और उसके साथ समकोन बनावेगी

(७) अगर दो सीधी रेखा एक दूसरी को बराबर हिस्सों में काटती हों और एक दूसरी के साथ समकोन बनाती हों तो उनमें से हर एक रेखा का हर बिन्दु दूसरी रेखा के सिरे से बराबर दूरी पर होगा

(८) अवसद चतुर्भुज की अव और अद भुज बराबर हैं और अस कर्ण व अद कोन को दो बराबर हिस्सों में बाँटता है साबित करो कि वस और दस भुज बराबर हैं और अस कर्ण वसद कोन को दो बराबर हिस्सों में बाँटता है

### साध्य ५ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के ऊपर के कोन आपसमें बराबर होते हैं और अगर बराबर भुजा बढ़ायी जायं तो आधार के नीचे के कोन भी आपसमें बराबर होंगे

वि० सूत्र फ़र्ज करो कि अवस समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी अव भुज अस भुज के बराबर है और यह भी फ़र्ज करो कि अव और अस बराबर भुज द और य बिन्दुओं तक बढ़ायी गयी हैं



तो अवस कोन बराबर होगा अस व कोन के और द व स कोन बराबर होगा य स व कोन के

(१८)

अ०— व द में कोई फ बिन्दु मानलो

और बड़ी रेखा अ य में से अ ज बराबर अ फ के काटो सा० १

और फ स और ज व की मिला दो

उप०—चूँकि अ ज बराबर अ फ के बनायी गयी है

और अ व बराबर है अ स के

इसलिये फ अ स त्रिभुज की दो भुज फ अ और अ स अलग

ज अ व त्रिभुज की दो भुजों ज अ और अ व के बराबर हैं

और इन भुजों के दर्मियान का फ अ ज कोन दोनों त्रिभुजों में समानित है

इसलिये फ स आधार बराबर है ज व आधार के और फ अ स त्रिभुज बराबर है ज अ व त्रिभुज के और बाकी कोन इन त्रिभुजों के जिनके सामने के भुज बराबर हैं अलग बराबर हैं यानी

अ स फ कोन बराबर है अ व ज कोन के और अ फ स कोन बराबर है अ ज व कोन के सा० ४

चूँकि कुल अ फ बराबर है कुल अ ज के और उनके हिस्से अ व और अ स आपस में बराबर हैं

इसलिये बाकी हिस्सा व फ बराबर है बाकी हिस्से स ज के सा० ५

और फ स बराबर ज व के साबित हो चुका है

अब चूँकि दो भुज व फ और फ स अलग बराबर हैं स ज और ज व भुजों के और व फ स कोन स ज व कोन के बराबर साबित हो चुका है

इसलिये व फ स और स ज व त्रिभुज आपस में बराबर हैं और उनके बाकी कोन जिनके सामने की भुज बराबर हैं अलग बराबर हैं यानी व स कोन बराबर है ज स व कोन के और व स फ कोन बराबर है स व ज कोन के

और चूँकि यह साबित हो चुका है कि कुल अ व ज कोन बराबर है कुल अ स फ कोन के और उनके हिस्से स व ज और व स फ आपस में बराबर हैं

(२६)

इसलिये बाकी कोन अब स बराबर है बाकी कोन अब स के ख० ३  
और यह कोन अब स समदिबाहु त्रिभुज व स आधार के  
ऊपर के हैं

और यह भी साबित हो चुका है कि अब स और ज स व कोन  
आपसमें बराबर है

और यह कोन आधार के नीचे के हैं

**फल-** इसलिये समदिबाहु त्रिभुज के आद्योपान्त-यही साबित  
करवा था

**अनुमान-** समत्रिबाहु त्रिभुज के सब कोन आपस में बराबर होते हैं

टि० (१) इस साध्य को हम इस तरह भी साबित कर सकते हैं अगर हम  
अब स त्रिभुज को लौट कर घरातल में इस प्रकार रखें कि अ बिन्दु की  
जगह न बदली जाय और अब भुज अ स भुज पर हो-चूंकि अ कोन दोनों  
त्रिभुजों में शामिल है अ स भुज अब भुज पर पड़ेगी और चूंकि अब  
और अ स आपस में बराबर हैं स बिन्दु व बिन्दु पर पड़ेगा और व बिन्दु  
स बिन्दु पर पड़ेगा और अ स व कोन अब स कोन को पूरा पूरा एक  
लेगा और व स ज कोन स व फ कोन को और इसलिये अ स व कोन  
बराबर होगा अब स कोन के और व स ज कोन बराबर होगा स व फ  
कोन के

## अभ्यास

(६) विषमकोन समचतुर्भुज के आमने सामने के कोन आपस में  
बराबर होते हैं

(१०) अगर एक ही आधार पर दो समदिबाहु त्रिभुज हों और आ-  
धार के सामने के कोनों के दर्मियान एक रेखा खींची जाय तो वह रेखा  
योंही या बढ़ कर आधार को दो बराबर हिस्सों में बांटेगी और आधार  
के साथ समकोन बनावेगी

(११) पांचवीं साध्य को बगैर हरेफ़ रखे साबित करो

## साध्य ६ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** अगर किसी त्रिभुज के दो कोन आपस में बराबर  
हों तो उन कोनों के सामने की भुज भी आपस में बराबर होंगी

**वि० सूत्र** फ़र्क़ करो कि अब स एक त्रिभुज है और उसके  
अब स और अ स व कोन आपस में बराबर हैं

(३०)

तो अ स और अ व भुज भी आपस में बराबर होंगी

उप० अगर अ स और अ व आपस में बराबर



नहीं तो उनमें से एक दूसरी से बड़ी होगी

फ़र्क़ करो कि अ व बड़ी है अ स से

अ व में से व द बराबर अ स के काटली

सा० ३

और स द मिलाओ

अ० १

अब चूँकि द व स और अ स व त्रिभुजों में द व बराबर है  
अ स के और व स दोनों में उभयनिष्ठ है यानी एक त्रिभुज की द व  
और व स भुज अलग-दूसरे त्रिभुज की अ स और स व दो भुजों  
के बराबर हैं

और द व स कोन बराबर है अ स व कोन के

फ़र्क़

इसलिये द स आधार बराबर है अ व आधार के और द व स  
त्रिभुज बराबर है अ स व त्रिभुज के

सा० ४

यानी छोटा त्रिभुज बराबर है बड़े त्रिभुज के और यह बात  
साफ़ झूठ है

स्व० ८

इसलिये अ व और अ स नाबराबर नहीं हैं यानी अ स बराबर  
है अ व के

फ़ल इसलिये अगर किसी त्रिभुज के दो कोन आद्योपान्त-यही  
साबित करना था

अनुमान-समानकोन त्रिभुज की सब भुजा आपस में बराबर होती है

टि० (१) याद रखना चाहिये कि अब मैं से छोटी रेखा के बराबर दिखा  
व कोन की तरफ़ से काटना चाहिये वरन चौथी साध्य से इस साध्य का  
साबित करना ग़ैर मुमकिन होगा

टि० (२) एक साध्य दूसरी साध्य की विलोम उस मूल में होती है जब  
कि दूसरी साध्य में जो बात कल्पित अर्थ की जगह पर हो वह पहिली साध्य  
में फ़ल की जगह पर हो और जो बात दूसरी साध्य में फ़ल की जगह पर  
हो वह पहिली साध्य में कल्पित अर्थ की जगह पर हो

यह साध्य पाँचवीं साध्य के पहिले हिस्से का विलोम है यानी इस साध्य  
में जो बात कल्पित अर्थ की जगह पर है उस हिस्से में फ़ल की जगह पर है  
और जो बात इसमें फ़ल की जगह पर है उसमें कल्पित अर्थ की जगह  
पर है जैसा कि इन दोनों साध्यों को इस तरह पर बयान करने से साफ़  
ज़ाहिर होजायगा

साध्य ५ अगर दो भुजा बराबर हैं तो उनके सामने के कोन बराबर हैं

साध्य ६ अगर दो कोन बराबर हैं तो उनके सामने के भुज बराबर हैं

(३१)

इस बात का जानना भी जरूर है कि किसी साध्य की सचाई उसके विलोमकी सचाई को कायम नहीं करती है सुमकिन है कि असकी साध्य सही हो लेकिन उसका विलोम गलत हो

टि० (३) यह साध्य व्यतिरेक युक्त से साबित की गयी है जब हम किसी साध्य के फल यानी नतीजे को सही न मान कर उसके विपरीत को सही मानते हैं और उससे आखिर को एक ऐसा नतीजा निकलता है जो साफ़ झूठ है या साध्य में जो बात फर्ज की गयी है उसके विरुद्ध है तो हम कहते हैं कि साध्य के फल का विपरीत जिसको हमने सही माना था गलत है और इसलिये साध्य का फल सही है ऐसे सूत्र को व्यतिरेक युक्त कहते हैं व्यतिरेक युक्त की बनिखत अन्वय युक्ति की लोग अक्सर कम कदर करते हैं क्योंकि व्यतिरेक युक्त में यह बात तो अलवत्ता जाहिर होजाती है कि साध्य हमारी सही है लेकिन उससे यह बात कि साध्य क्यों और किस वजह से सही है नहीं मालूम होसکتो

व्यतिरेक युक्ति को उक्लैदस ने साध्यों के विलोम के साबित करने में अक्सर काम में लाया है और अन्वय युक्ति से उसने विलोमों के साबित करने में बहुत कम काम किया है

टि० (४) इस साध्यकी जरूरत दूसरे अध्याय की चौथी साध्य तक नहीं पड़ती है अगर इसको हम कहीं दूसरी जगह पर उठा कर रख दें तो कुछ खराबी नहीं पैदा होगी मसलन् अगर हम इसको अठारवीं साध्य के बाद रखें तो यह इस तरह साबित होसکتो है

फर्ज करो कि अबस कोन अस व कोन के बराबर है तो अस भुज भी अ व भुज के बराबर होगा और यह भुज आपस में बराबर नहीं तो एक उनमें से बड़ी होगी फर्ज करो कि अ व बड़ी है अ स से तो अ स व कोन बड़ा होगा अबस कोन से (सा० १८) लेकिन यह ना सुमकिन है क्योंकि अ स व और अ व स कोन बम्बजिव फर्ज के आपस में बराबर हैं इसलिये अ व और अ स नाबराबर नहीं हैं यानी अ व बराबर है अस के

अगर इस साध्य को छब्बीसवीं साध्य के बाद लिखें तो इस तरह साबित करेंगे

व अस कोन को अ द रेखा से जो व स आधार से द बिन्दु पर मिलती है दो बराबर हिस्से में बांटे इस सूत्र में दो त्रिभुज अव द और अस द पैदा होंगे और छब्बीसवीं साध्य के हुकम से आपस में सब तरह बराबर होंगे और अ व भुज अस भुज के बराबर होगी

टि० (५) कठो साध्य आच्छादन क्रिया से भी जैसे कि पांचवीं साध्य (टि० सा० ५ देखो) साबित की गयी है साबित होसکتो है

## अभ्यास

(१२) अगर एक समदिबाहु त्रिभुज के आधार के ऊपर के कोन अब व



( ३२ )

और असब रेखा ब द और स द से दो बराबर हिस्सों में बांटे जायं तो साबित करो कि ब स द समद्विबाहु त्रिभुज है

(१३) व अ स त्रिभुज का व कोन अ कोन से दूना है अगर ब द रेखा व कोन को दो बराबर हिस्सों में बांट कर अ स भुज से द बिन्दु पर मिले तो साबित करो कि ब द बराबर है अ द के

(१४) पहले अध्याय की पांचवीं साध्या में अगर फ स और व ज बिन्दु ह पर मिलें तो फ ह बराबर ज ह के होगी

(१५) पहले अध्याय की पांचवीं साध्या में अगर फ स और व ज बिन्दु ह पर मिलें तो अ ह रेखा व अ स कोन को दो बराबर हिस्सों में बांटेगी

### सवालात इमतिहान साध्य १ से ६ तक

(१) पहली साध्या में निर्दिष्ट आंर व.णाय बताओ

(२) परिमित सीधी रेखा स क्या मतलब है और उसका विलोम क्या है

(३) अगर पहली साध्या में अ व के दूसरी ओर एक और समद्विबाहु त्रिभुज बनाया जावे तो दोनों त्रिभुजों से मिल कर कौनसी शकल पैदा होवेगी

(४) दूसरी साध्या की कितनी सूरतें हो सकती हैं (१) जब दिया हुआ बिन्दु न दी हुई रेखा में हो और न उसके बड़े हुए हिस्से में हो (२) जब वह रेखा के भीतर हो या उसके बड़े हुए हिस्से में हो (३) जब वह रेखा के सिरे पर हो

(५) एक रेखा में से जो दोनों ओर अपरिमित है एक रेखा की लम्बाई के बराबर कैसे काट सकते हैं

(६) बयान करो कि ३ अवाधोपक्रम में जो परकार का खास और परिमित काम रक्खा गया है इसकी वजह से दूसरी और तीसरी साध्या की क्यों ज़रूरत हुई क्या यह ज़रूर है कि दूसरी साध्या में सिर्फ समद्विबाहु त्रिभुज बनाया जावे क्या हम इस जगह समद्विबाहु त्रिभुज बना सकते हैं

(७) चौथी शकल के कल्पित अर्थ और फल में कितने कितने हिस्से हैं उनको बयान करो

(८) चौथी साध्या को किस रीति से सिद्ध किया है और उसरीति में कौनसा स्वयंसिद्ध काम में लाया गया है

(९) हर त्रिभुज में कितने हिस्से होते हैं (जवाब) तीन सजा और तीन कोने

(१०) एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज के बराबर साबित करने में कम से कम कितने हिस्से एक त्रिभुज के दूसरे त्रिभुज के बराबर होने चाहिये (जवाब) साधारण रीति से कोई तीन सिवाय तीन कोनों के, इसका सुबूत आठ, दब्बीस, चार साध्य में हुआ है



(३३)

(११) इन दो सीधी रेखाओं के जिनके दोनों बिन्दु शामिल हैं कौन की खासियत चौथी साध्य में बयान हुई है (जवाब) वे एक दूसरे को टक लेती हैं

(१२) ५, ६ साध्यों में क्या सम्बन्ध है

(१३) एक साध्य दूसरी साध्य की प्रतिलोम कब होती है

(१४) उक्त दस ने बिलोम साध्यों को किस रीति से सिद्ध किया है

(१५) क्या किसी साध्य की सचाई उसके बिलोम को भी स्थापन करती है और यदि नहीं करती है तो उदाहरण दो

(१६) व्यतिरेक युक्ति से क्या मतलब है और व्यतिरेक युक्ति और अन्वय युक्ति में अन्तर बताया

(१७) छठे साध्य को कौनसी भ्रूत बात मान कर साधित किया है

(१८) छठे साध्य को अन्वय युक्ति सिद्ध करो

### साध्य ७ प्रमेयोपपाद

**सा० सूत्र** अगर एक ही आधार पर और उसके एक ही तरफ़ दो त्रिभुज हों तो सुमकिन नहीं है कि उनके वह भुज जिनके सिरे आधार के एक सिरे पर हों आपस में बराबर हों और वह भुज भी जिनके सिरे आधार के दूसरे सिरे पर हों आपस में बराबर हों

**वि० सूत्र** अगर यह सुमकिन हो तो फ़र्ज़ करो कि एक ही आधार अ ब पर और उसके एक ही तरफ़ ऐसे दो त्रिभुज अ स व और अ द व हैं कि उनकी स अ और द अ भुज जिनके सिरे आधार के अ सिरे पर हैं आपस में बराबर हैं और स व और द व भुज भी जिनके सिरे आधार के व सिरे पर हैं आपस में बराबर हैं

**अं०—सद मिलाओ—**इस शक की तीन सूरतें हैं

पहली सूरत यह है कि हर त्रिभुज का शीर्ष दूसरे त्रिभुज के बाहर हो

**उप०—**चूँकि अ द बराबर अ स के फ़र्ज़ की गई है

इसलिये अ स द कोन बराबर है अ द स कोन के

लेकिन अ स द कोन व स द कोन से बड़ा है



सा० ५

सा० ६

(३४)

इसलिये अद स कोन भी व स द कोन से बड़ा है

इसवास्ते व द स कोन व स द कोन से और भी ज़ियादा बड़ा है

फिर चूँकि व स बराबर व द के फर्ज की गई है

इसलिये व द स कोन बराबर है व स द कोन के सा० ५

लेकिन यह साबित हो चुका है कि व द स कोन व स द कोन से बड़ा है

इसलिये व द स कोन व स द कोन से बड़ा और उसके बराबर भी है

और यह बात नामुमकिन है

दूसरी सूरत यह है कि अद व त्रिभुज का शीर्ष द त्रिभुज

अ स व त्रिभुज के अन्दर है

अं०— अ स और अद को य और फ बिन्दुओं तक बढ़ा दो

उप०— चूँकि अ स द त्रिभुज में अ स भुज बराबर

है अद भुज के

इसलिये स द आधार के नीचे के य स द और

फ द स कोन आपस में बराबर हैं सा० ५

लेकिन य स द कोन व स द कोन से बड़ा है ख० ६

इसलिये फ द स कोन भी व स द कोन से बड़ा है

इसवास्ते व द स कोन व स द कोन से और भी ज़ियादा बड़ा है

फिर चूँकि व स बराबर व द के फर्ज की गई है

इसलिये व द स कोन व स द कोन के बराबर है

लेकिन यह बात साबित हो चुकी है कि व द स कोन व स द कोन से बड़ा है

इसलिये व द स कोन व स द कोन से बड़ा और उसके बराबर भी है और यह बात नामुमकिन है

तीसरी सूरत जिसमें अद व त्रिभुज का द शीर्ष अ स व त्रिभुज की भुजा पर है इस सूरत में साफ़ जाहिर है कि व द और व स आपस में बराबर नहीं हो सकती हैं



(३५)

**फल** इसलिये अगर एक ही आधार पर और उसकी एक ही तरफ़ दो विभुज आयोपान्त यही साबित करना था

टि० (१) इस साध्य का कामरूप पछिले अध्याय की आठवीं साध्य के साबित करने में पड़ता है सो आठवीं साध्य का सुबूत दूसरे तौर पर भी हो सकता है और उस सुबूत में इस साध्य की कुछ ज़रूरत नहीं पड़ती है

टि० (२) उक्तैदस ने इस साध्य के साबित करने में साध्य के नतीजे के खिलाफ़ को सही मान कर उससे आखिर को ऐसी दो बातें निकाली है जो एक दूसरी के विरुद्ध हैं यानी एक कोन दूसरे कोन से बड़ा और उसके बराबर भी है इस किस के सुबूत का इस्तेमाल उक्तैदस ने सिर्फ़ इसी साध्य में किया है और किसी दूसरी जगह पर नहीं किया है

टि० (३) याद रखना चाहिये कि एक ही आधार पर उसके एक ही तरफ़ ऐसे दो विभुज हो सकते हैं कि उनकी वह भुज जिनके सिरे आधार के एक सिरे पर हों आपस में बराबर हों मगर वह भुज जिनके सिरे आधार के दूसरे सिरे पर हों नाबराबर हों

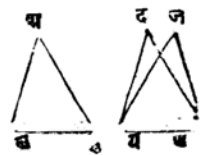
## अभ्यास

(१६) साबित करो कि दो वृत्त अपने केन्द्रों को मिलाते हुए रेखा एक ओर सिर्फ़ एक बिन्दु पर और दो से ज़्यादा बिन्दुओं पर एक दूसरे को नहीं काट सकते हैं

## साध्य ८ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** अगर एक विभुज की दो भुज दूसरे विभुज की दो भुज के अलग अलग बराबर हों और उनके आधार भी आपस में बराबर हों तो कोन जो एक विभुज की दो भुजों से बनता है बराबर होगा दूसरे विभुज के उस कोन के जो उन भुजों की बराबर वाली भुजों से बनता है

**वि० सूत्र** फ़र्ज करो कि अब स विभुज की दो भुज अ व और अ स विभुज द य फ़ की द य और द फ़ भुजों के अलग अलग बराबर हैं यानी अ व बराबर द य के और अ स बराबर द फ़ के है और ब स आधार भी य फ़ आधार के बराबर है तो व अ स कोन बराबर होगा य द फ़ कोन के



(३६)

**उप०** क्योंकि अगर अब स त्रिभुज दय फ त्रिभुज पर इस तरह रक्खा जाय कि व बिन्दु य बिन्दु पर और व स रेखा य फ रेखा पर हो तो चूँकि व स बराबर है य फ के ( फर्ज ) स बिन्दु फ बिन्दु पर पड़ेगा

और जब व स आधार य फ आधार पर पूरा पड़ता है तो व अ और स अ भुज य द और फ द भुजों पर पड़ेगा क्योंकि अगर व स आधार य फ आधार पर पड़े लेकिन व अ और ~~स अ~~ भुज य द और फ द भुजों पर न पड़ें बल्कि सुखलिफ जगहों पर य ज और फ ज की तरह पड़ें तो एक ही आधार पर और उसके एक ही तरफ ऐसे दो त्रिभुज होंगे कि जिनकी वह भुज जिनके सिरे आधार के एक सिरे पर हैं आपस में बराबर हैं और उनकी वह भुज भी जिनके सिरे आधार के दूसरे सिरे पर हैं आपस में बराबर हैं

लेकिन यह बात नासुमकिन है

सा० ७

इसलिये अगर व स आधार य फ आधार पर पड़ता है तो व अ और स ज भुज भी य द और फ द भुजों पर पड़ेंगी

और इसलिये व अ स कोन और य द फ कोन एक दूसरे की पूरा २ ढक लेंगे

और इसलिये वह आपस में बराबर हैं

स्व० ८

फल इसलिये अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अद्योपान्त यही साबित करना था

**अनुमान** इससे यह साबित हो सक्ता है कि बराबर भुजों के सामने

के कोन भी आपस में बराबर हैं यानि व कोन बराबर य कोन के और स कोन बराबर है फ कोन के और दोनों त्रिभुज भी आपस में बराबर हैं

टि० (१) इस साध्य को बगैर मदद सातवीं साध्य के इस तरह साबित कर सकते हैं

फर्ज करो कि अब स त्रिभुज और द य फ त्रिभुज इस तौर से रखे गये हैं कि व स आधार य फ आधार पर है और त्रिभुजों के शीर्ष अ और द एक दूसरे के सामने हैं

(३७)

द अ मिलाओ इसकी तीन मूर्तें है

पहली मूर्त यह है कि द अ आधार य फ को द और फ के दर्मि-  
यान काटता है

चूँकि अ य द त्रिभुज में अ य भुज द य भुज के बराबर है  
इसलिये य द अ कोन य अ द कोन के बराबर है सा० ५

और चूँकि अ फ द त्रिभुज में अ फ भुज द फ भुज के  
बराबर है इसलिये फ द अ कोन फ अ द कोन के बराबर है सा० ५

लेकिन साबित हो चुका है कि य द अ कोन य अ द कोन  
के बराबर है इसलिये कुल य द फ कोन कुल य अ फ कोन के बराबर है स्व० २

लेकिन य अ फ कोन व अ स कोन है इसलिये व अ स कोन य द फ कोन  
के बराबर है

दूसरी मूर्त यह है कि द अ आधार य फ कोन काटे

चूँकि अ य द त्रिभुज में अ य भुज द य भुज के बराबर  
है इसलिये य द अ कोन य अ द कोन के बराबर है सा० ५

और चूँकि अ फ द त्रिभुज में अ फ भुज द फ भुज के  
बराबर है इसलिये फ द अ कोन फ अ द कोन के बरा-

बर है

लेकिन साबित हो चुका है कि कुल य द अ कोन कुल य अ द कोन के  
बराबर है और इसके हिस्से फ द अ और फ अ द आपस में बराबर हैं इस-  
लिये बाकी हिस्सा य द फ बराबर है बाकी हिस्सा य अ फ के स्व० २

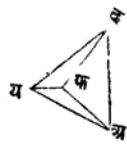
लेकिन य अ फ कोन व अ स कोन है इसलिये व अ स कोन य द फ कोन  
के बराबर है

तीसरी मूर्त यह है कि द अ आधार य फ के किसी एक सिरे पर  
होकर जाता है

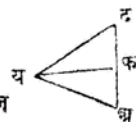
चूँकि अ य द त्रिभुज में द य बराबर है अ य के इसलिये  
य अ फ कोन बराबर है य द फ कोन के सा० ५

लेकिन य अ फ कोन व अ स कोन है इसलिये व अ स कोन  
बराबर है य द फ कोन के

टि० (२) यह साध्य पहले अध्याय की चौथी साध्य का बिलोम है जब  
किसी प्रमेयोपपाद्य साध्य में कई बातें फर्ज़ की हुई हों और उनका एक  
नतीजा हो अगर कोई दूसरी साध्य ऐसी बनाई जावे कि पहली साध्य की  
फर्ज़ की हुई बातों में से एक बात इस साध्य का नतीजा हो और पह-  
ली साध्य का नतीजा मय बाकी फर्ज़ की हुई बातों के इस साध्य में  
फर्ज़ की हुई बातें हों तो ऐसी दो साध्यों को भी एक दूसरी का बिलोम  
कहते हैं और इसी मूर्त में आठवीं और चौथी साध्य एक दूसरी का  
बिलोम हैं जैसा कि इन साध्यों को इस तरह पर दयान करने से साक-  
नालूम होता है



सा० ५



(३८)

साध्य ४ { अगर दो भुज बराबर हैं तो आधार बराबर है  
 और आधारों के सामने के कोन बराबर हैं

साध्य ८ { अगर दो भुज बराबर हैं तो आधार के सामने के कोन बराबर हैं  
 और आधार बराबर हैं

आठवें साध्य का दूसरी किस का विलोम यानी अगर एक त्रिभुज के तीन कोन दूसरे त्रिभुज के तीन कोनों के अलग अलग बराबर हों तो बराबर कोनों के सामने के भुज भी आपसमें बराबर होंगे सही नहीं है

### अभ्यास

(१७) अगर समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष से एक रेखा आधार के दो बराबर हिस्से करती हुई खींची जाय तो वह शीर्ष के भी दो बराबर हिस्से करेगी

(१८) विषमकोन समचतुर्भुज के कर्ण जिन कोनों में होकर गुजरते हैं उनके दो बराबर हिस्से करते हैं

(१९) अब स और अ द व दो त्रिभुज अब रेखा के एक ही तरफ हैं और उनकी अ स और व द भुज बराबर हैं और अ द और व स भुज भी बराबर हैं और अ द और व स एक दूसरी को य बिन्दु पर काटती हैं तो साबित करो कि अ य व समद्विबाहु त्रिभुज है

### साध्य ९ वस्तुपपाद्य

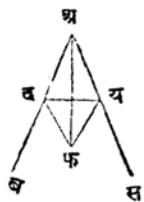
सा० सूत्र— दिये हुए सरलकोन के दो बराबर हिस्से करो

वि० सूत्र— फल करो कि व अ स दिया हुआ

सरल कोन है

उसके दो बराबर हिस्से करने हैं

अंकन— अब मैं कोई द बिन्दु ली



और बड़ी रेखा अ स में से अ य बराबर अ द के काटली सा० ३

और द य मिला दो

अवा० १

द य पर अ से दूर द फ स समद्विबाहु त्रिभुज बनाओ सा० १

और अ फ मिलाओ

अवा० १

तो अ फ रेखा व अ स कोन के दो बराबर हिस्से करेगी

उप०—चूंकि अ य बराबर अ द के बनाई गई है



(३६)

और अ फ दी त्रिभुज द अ फ और य अ फ में उभयनिष्ठ है  
यानी दो भुज द अ और अ फ अलग-बराबर हैं य अ और  
अ फ दो भुजों के

और द फ आधार य फ आधार के बराबर है

इसलिये द अ फ कोन बराबर है य अ फ कोन के

इसलिये दिये हुए व अ स सरलकोन के अ फ रेखा से दो बरा-  
बर हिस्से होगये और इसी कोन के दो बराबर हिस्से करने  
की सज्जरत थी

टि० (१) अ से दूर समत्रिबाहु त्रिभुज बनाने की कौद इसलिये की  
गई है कि अगर ऐसा न हो और समत्रिबाहु त्रिभुज द य के उस तरफ  
बनाया जावे जिसतरफ द अ य त्रिभुज है तो एक मूरत में समकिन होगा  
कि फ बिन्दु अ बिन्दु पर पड़े और उस मूरत में अ फ रेखा न खिच सकेगी

यह भी याद रखना चाहिये कि फ बिन्दु व अ स कोन के अन्दर होगा  
क्योंकि फ बिन्दु के व अ स कोन के बाहर होने या अ व या अ स रेखाओं  
पर होने से यह फल निकलेगा कि समत्रिबाहु त्रिभुज फ द य के आधार  
द य पर का कोन एक ही हालत में व द य कोन या स य द कोन से  
छोटा होगा और उससे बड़ा या उसके बराबर होगा और यह बात  
नासमकिन है

टि० (२) इस साध्य के लगातार इस्तेमाल करने से एक कोन के  
४, ८, १६ वगैरह बराबर हिस्से हो सके हैं लेकिन हर कोन के तीन बरा-  
बर हिस्से करने में बड़े-२ लायक रेखागणित जानने वालों का परिश्रम  
निष्फल रहा

## अभ्यास

(२०) नवीं साध्य की वगैरह मदद आठवीं साध्य के साबित करो

### साध्य १० वस्तुपपाद्य

सा० सूत्र— दो हुई परमित सीधी रेखा के दो बराबर  
हिस्से करो

वि० सूत्र— फर्ज करो कि अ व दो हुई परमित  
सीधी रेखा है उसके दो बराबर हिस्से करने हैं



अं०— अ व पर अ स व समत्रिबाहु त्रिभुज बनाओ सा० १

और अ स व कोन के स द रेखा से जो अ व की द बिन्दु पर  
काटती है दो बराबर हिस्से करो

सा० ८

(४०)

तो अब के द बिन्दु पर दो बराबर हिस्से हो जायेंगे

उप०-- चूँकि अस बराबर है व स के और स द दो त्रिभुज अस द और व स द में उभयनिष्ठ है

यानी दो भुज अस और स द अलग २ बराबर हैं व स और स द दो भुजों के और अस द कोन व स द कोन के बराबर है

इसलिये अ द आधार बराबर है व द आधार के सा० ४

इसलिये अब रेखा के द बिन्दु पर दो बराबर हिस्से होंगे

और इसी रेखा के दो बराबर हिस्से करने की ज़रूरत थी

टि० इस साध्य के लगातार काम में लाने से एक परमित सीधी रेखा के चार आठ सोलह इत्यादि बराबर हिस्से हो सक्ती है

## अभ्यास

(२१) साबित करो कि दसवें साध्य में स द रेखा अब रेखा के साथ समकोन बनाती है

(२२) दो हुई परमित सीधी रेखा को इतना बढ़ाओ कि बढ़ा हुआ हिस्सा उस रेखा का जो दो हुई रेखा और बढ़े हुए हिस्से से बने तिहाई हो

## साध्य ११ वस्तूपपाय

सा० सूत्र--दिये हुए बिन्दु से जो एक दो हुई सीधी रेखा में है एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो दो हुई रेखा के साथ समकोन बनावे

वि० सूत्र-- प्रकृति करो कि व स दो हुई सीधी रेखा और उसमें अ दिया हुआ बिन्दु है

अ बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचनी है व स के साथ समकोन बनावे



अं०-- व स में कोई द बिन्दु लें

और अ य बराबर अ द के बनाओ

सा० ३

य द पर द फ य समतिबाह त्रिभुज बनाओ

सा० १

और फ अ मिलाओ

अ० १

(४१)

तो अ फ सीधी रेखा जो अ बिन्दु से खींची गयी है व स रेखा के साथ अ बिन्दु पर समकोन बनावेगी

उप०—चूँकि अ व बराबर अ द के बनावे गई है और अ फ दो त्रिभुज द अ फ और य अ फ में उभयनिष्ठ है यानी द अ और अ फ दो भुज अलग बराबर हैं य अ और अ फ दो भुजों के

और द फ आधार बराबर है य फ आधार के प० २४

इसलिये द अ फ कोन बराबर है य अ फ कोन के सा० ८

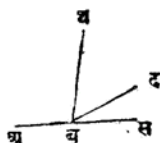
और यह आसन्न कोन हैं

लेकिन जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी होकर ऐसे आसन्न कोन बनावे जो एक दूसरे के बराबर हों तो उन कोनों में से हर एक कोन को समकोन कहते हैं प० १०

इसलिये द अ फ और य अ फ कोनों में से हर एक समकोन है इसलिये दिये हुए अ बिन्दु से जो दो हुई व स सीधी रेखा में है अ फ सीधी रेखा जो व स के साथ समकोन बनाती है खिंच गयी- और इसी रेखा के खींचने की ज़रूरत थी

अनुमान-- इस साध्य की मदद से साबित होसक्ता है कि दो सीधी रेखा उभयनिष्ठ हिस्सा नहीं रख सकतीं

अगर सुमकिन हो तो फ़र्ज़ करो कि अ व स और अ व द दो सीधी रेखाओं में अ व हिस्सा उभयनिष्ठ है



व बिन्दु से वय ऐसी सीधी रेखा खींचो जो अ व रेखा के साथ समकोन बनाती हो सा० ११

चूँकि अ व स सीधी रेखा फ़र्ज़ की गयी है

इसलिये स व य कोन बराबर है य व अ कोन के

चूँकि अ व द भी सीधी रेखा फ़र्ज़ की गयी है

इसलिये द व य कोन बराबर है य व अ कोन के

(४२)

इसलिये दू वय कोन सब वय कोन के बराबर है ख० १

यानी छोटा कोन बराबर बड़े कोन के है

और यह नासुमकिन है

ख० ६

इसलिये दो सीधी रेखा उभयनिष्ठ हिस्सा नहीं रखतीं यही साबित करना था

टि० (१) यह अनुमान उकूलेदस में जो यूनानी ज्ञान में लिखी है नहीं है इसको सिमसन साहब ने ग्यारहवीं साध्य के साथ लगाया है मगर इसपर बड़ा भारी ऐतराज हो सकता है क्योंकि हम नहीं जानते कि वय लंब किस तरह खींचा जायगा अगर हम उसके खींचने के लिये ग्यारहवीं साध्य की मदद लेवें तो जरूर है कि हम व अ को बढ़ावें और जब हम व अ को बढ़ाएंगे तो यह बात मान लेना फर्ज होगा कि वह सिर्फ एक तरह बढ़ सकती है क्योंकि वगैरे इस बात के मान लेने के हम नहीं जान सकते कि सिर्फ एकही लंब वय खिंचेगा और जब हमने व अ का सिर्फ एकही तरह बढ़ना मान लिया तो हमने उस दावे को जिसको हमें साबित करना चाहिये मान लिया

अगर सिमसन साहब का अनुमान तरहवीं साध्य के बाद आवे तो वह इस तरह साबित हो सकता है अगर सुमकिन हो तो फर्ज करो कि अबस और अबद दो सीधी रेखाओं में अब हिस्सा उभयनिष्ठ है व बिन्दु से कोई वय रेखा खींचो तो अबय और वयस कोन मिलकर बराबर दो समकोन के होंगे (सा० १३) और अबय और यवद कोन भी मिलकर बराबर दो समकोन के होंगे (सा० १३) इसलिये अबय और यवस कोन बराबर होंगे अबय और यवद कोनों के (ख० १) इसलिये यवस कोन यवद कोन के बराबर होगा (ख० ३) यानी कुल अपने एक टुकड़े के बराबर होगा और यह नासुमकिन है (ख० ६) इसलिये दो सीधी रेखा उभयनिष्ठ हिस्सा नहीं रखतीं

अगर सिमसन साहब को इसका खयाल करना ही था कि दो सीधी रेखा उभयनिष्ठ हिस्सा रखती हैं या नहीं तो उनको चाहिये था कि इसे पहले ही खयाल करते क्योंकि पाँचवीं साध्य में अगर दो सीधी रेखा अब तक एकही हों और व बिन्दु से जुड़ी हों तो व स आधार के नीचे व बिन्दु पर दो छोटे बड़े कोन पैदा होंगे और उनमें से हर एक वसज कोन के बराबर होगा लोगों की यह भी राय है कि पहली साध्य ही में चुपचाप मान लिया गया है कि अ स और व स रेखा स बिन्दु पर जहाँ वह मिलती हैं उभयनिष्ठ हिस्सा नहीं रखतीं

सिमसन साहब ने इस नतीजे का बयान ग्यारहवीं साध्य से पहले कहीं नहीं किया है अगर हम इस अनुमान को निकाल कर दसवीं खंयंसिद्धि

॥

( ४३ )

में यह बात झियादा करदें कि अगर एक सीधी रेखा के कोई दो बिंदु दूसरी सीधी रेखा के दो बिंदुओं पर पड़ें तो दोनों सीधी रेखा एक दूसरी पर उन दो बिंदुओं के अन्दर और बाहर पड़ेंगी तो सब भगड़ें तमाम हो जायंगे

टि० ( २ ) ग्यारहवीं साध्य नवीं साध्य की एक खास सूरत है दोनों साध्यों में अफ ऐसी रेखा खींची गयी है जो वअ और सअ के साथ अ बिंदु पर बराबर कोन बनाती है नवीं साध्य में वअ रेखा और सअ रेखा के लिये कोई कूँद नहीं है ग्यारहवीं साध्य में यह कूँद है कि वअ और सअ रेखा एकही सीध में हों नवीं और ग्यारहवीं साध्यों के दावे एकही दावे में इस तरह बयान होते हैं कि उस बिन्दु से जहाँ दो दी हुई सीधी रेखा मिलती हैं एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो दी हुई रेखाओं के साथ बराबर कोन बनावे

टि० ( ३ ) दो बिन्दुओं के दमियानकी दूरी वह सीधी रेखा है जो उन बिन्दुओं को मिलाती है और एक बिन्दु की एक सीधी रेखा से दूरी वह छोटी से छोटी सीधी रेखा है जो उस बिन्दु से उस रेखा तक खींची जाय

## अभ्यास

( २३ ) एक ऐसा बिन्दु दर्याफ्त करो जो दिये हुए तीन बिन्दुओं से जो एकही सीधी रेखा में नहीं हैं बराबर दूरी पर हों

( २४ ) दी हुई सीधी रेखा में एक ऐसा बिन्दु दर्याफ्त करो कि जिसकी दूरी दो दिये हुए बिन्दुओं से बराबर हो और यह भी बताओ कि किस हालत में ऐसा बिन्दु दर्याफ्त न हो सकेगा

## साध्य १२ वस्तूपपाद्य

सा० सूत्र- दी हुई अपरमित सीधी रेखा पर दिये ज्ञये बिन्दु से जो उस रेखा के बाहर है एक लम्ब डालो

वि० सूत्र- फर्ज करो कि अब दी हुई अपरमित सीधी रेखा है जिसकी दोनों तरफ चाहें जितना बढ़ा सकते हैं और स दिया हुआ बिन्दु उसके बाहर है

स बिन्दु से सीधी रेखा अब पर एक लंब डालना है

अं०- अब की दूसरी तरफ कोई द बिन्दु लेलो



(४४)

और स केन्द्र से सदैव दूरी पर य फ ज वृत्त खींची जो अब  
से फ और ज पर मिले अवा० ३

फ ज के ह बिन्दु पर दो बराबर हिस्से करो सा० १०

और स ह मिलाओ अवा० १

तो स ह जो स बिन्दु से खींची गई है दो छेद अब रेखा पर  
लम्ब होगी

स फ और स ज मिलाओ अवा० १

उप०— चूँकि फ ह बराबर ह ज के बनाई गई है और ह स दो  
त्रिभुज फ ह स और ज ह स में अभयनिष्ठ हैं

यानी दो भुज फ ह और ह स दो भुजों ज ह और ह स के  
अलग २ बराबर हैं

और स फ आधार बराबर है स ज आधार के प० १५

इसलिये फ ह स कोन बराबर है ज ह स कोन के सा० ८

और यह आसन्न कोन हैं

लेकिन जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी  
होकर आसन्न कोन बराबर बनावे तो उन कोनों में से हर एक  
कोन समकोन होता है और खड़ी सीधी रेखा को दूसरी सीधी  
रेखा पर लम्ब कहते हैं

इसलिये स ह रेखा अब पर लम्ब है प० १०

इसलिये स बिन्दु से जो दो छेद अब रेखा के बाहर है स ह  
रेखा लम्ब अब रेखा पर खिंचगई—और इसी लम्ब के खींचने  
की ज़रूरत थी

टि० (१) इस साध्य में इस बात को मान लिया है कि वृत्त अब रेखा  
को दो बिन्दुओं पर काटेगा क्योंकि जब हम खयाल करते हैं कि वृत्त की  
परिधि का एक एक हिस्सा अब रेखा के दोनों तरफ है और परिधि एक  
तरह की लगातार रेखा है तो यह ज़ाहिर बात मालूम देती है कि परिधि  
दो बार अब सीधी रेखा को काटती हुई गुज़रगी दो छेद रेखा में अप-  
रिमित होने की कौद रखी गई है क्योंकि अगर यह कौद न होती तो  
यह समझना था कि ख़ास हालतों में परिधि अब रेखा को किसी जगह  
पर न काटती या सिर्फ एकही जगह पर काटती



(४५)

टि० (२) उक्तौ दस ने समकोन बनाती हुई रेखा और लम्ब रूप रेखाओं में यह फर्क रक्खा है कि जब रेखा किसी दूसरी रेखा के एक बिन्दु से ग्यारहवीं साध्य के अनुसार खींची गई है उसको उक्तौ दस ने समकोन बनाती हुई रेखा कहा है और जब रेखा किसी बिन्दु से जो दूसरी रेखा के बाहर है बारहवीं साध्य के अनुसार उस रेखा पर डाली गई है उसको उक्तौ दस ने लम्ब कहा है लेकिन इस समय के लिखने वाले इस फर्क का कुछ भी खयाल नहीं करते और हर एक को दूसरी की जगह इस्तेमाल करते हैं

## अभ्यास

(२५) अगर किसी त्रिभुज के शीर्ष से आधार पर लम्ब डाला जावे और वह लम्ब आधार को दो बराबर हिस्सों में बांटे तो वह त्रिभुज समद्विबाहु होगा

(२६) दो दिये हुए बिन्दुओं से जो दी हुई रेखा के आसने सामने की तर्फों में है ऐसी दो रेखा खींचो कि वह दी हुई रेखा से ऐसे बिन्दु पर मिलें कि उनसे बने हुए कोने के दो हुई रेखा से दो बराबर हिस्से हों और यह भी बयान करो कि किस हालत में इन रेखाओं का खींचना नामुमकिन होगा

## साध्य १३ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र— जो कोन एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा के साथ उसकी एक तरफ बनाती है वह या तो दो समकोन होते हैं या दोनों मिलकर दो समकोन के बराबर होते हैं

वि० सूत्र फर्क करो कि अब सीधी

रेखा स द सीधी रेखा के साथ उसके एक तरफ सब अ और अब द कोन बनाती है

तो यह कोन या तो दो समकोन होंगे

या मिलकर दो समकोन के बराबर होंगे

क्योंकि अगर स व अ कोन अब द कोन के बराबर है तो उनमें से हर एक समकोन है

अगर स व अ कोन अब द कोन के बराबर नहीं है

अं० व बिन्दु से स द के साथ समकोन बनाती हुई व य

रेखा खींची

उप० तो स व य और य व द कोन दो समकोन हैं

सा० ११

प० १०

(४६)

चूँकि सब य कोन बराबर है सब अ और अब य दो कोनों के इन दोनों बराबरों में से हर एक में य व द कोन मिलाओ इसलिये सब य और य व द कोन बराबर हैं सब अ और य व अ और य व द तीनों कोनों के ख० २

फिर चूँकि द व अ कोन द व य और य व अ कोनों के बराबर हैं और इन दोनों बराबरों में से हर एक में अ व स कोन मिलाओ इसलिये द व अ और अ व स कोन मिलकर बराबर हैं द व य और य व अ और अब य तीनों कोनों के ख० २

लेकिन साबित हो चुका है कि सब य और य व द कोन भी इन्हीं तीन कोनों के बराबर हैं

और जो चीज़ें एक ही चीज़ के बराबर होती हैं वह आपस में बराबर होती हैं

इसलिये सब य और य व द कोन मिलकर द व अ और अब स कोन के बराबर हैं ख० १

लेकिन सब य और य व द दो समकोन हैं

इसलिये द व अ और अब स कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं

फल इसलिये जो कोन एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा के साथ आद्योपान्त- यही साबित करना था

अनुमान १ सब कोन जो कई सीधी रेखा एक सीधी रेखा के एक बिन्दु पर उसके एक ही तरफ़ बनाती हैं मिलकर दो समकोन के बराबर होते हैं

अनुमान २ अगर दो सीधी रेखा एक दूसरी को किसी बिन्दु पर काटें तो उस बिन्दु के चारों कोन मिलकर बराबर होंगे चार समकोन के

अनुमान ३ सब कोन जो कई सीधी रेखाओं के एक बिन्दु पर मिलने से बनेंगे मिलकर चार समकोन के बराबर होंगे

टि० (१) तेरहवीं साध्य के दावे में इस इबारत का कि इसके साथ कोन बनाती है छोना ज़रूर है क्योंकि अगर यह इबारत नहीं तो साध्य की एक यह भी सूरत होगी कि एक रेखा दूसरी रेखा के सिरे पर खड़ी हो और उस सूरत में सिर्फ़ एक कोन बनेगा

टि० (२) अगर दो कोन मिलकर बराबर दो समकोन के हों तो उनमें से हर एक को दूसरे का पूरक कहते हैं और अगर दो कोन मिलकर बराबर एक समकोन के हों तो उनमें से हर एक दूसरे का कोटि होगा

( ४७ )

## अभ्यास

(२७) अगर वअस कोन की एक भुज वअ प्रीर्ध की तरफ द तक व-  
टायी बाय और अय और अफ रेखा वअस और सअ द कोनों के दोर  
बराबर हिस्से करें तो साधित करो कि यअफ समकोन है

(२८) किसी कोन के पूरक और उसी कोन के कोटि के दर्मियाग का  
फर्क समकोन होता है

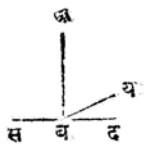
## साध्य १४ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** अगर किसी सीधी रेखा के एक बिन्दु पर दो सीधी  
रेखा उसकी आमने सामने की तरफों से आकर आसन्न कोन  
बराबर दो समकोन के बनावें तो यह दोनों सीधी रेखा एक ही  
सीधी रेखा में होंगी

**वि० सूत्र**-फर्क करो कि अब सीधी रेखा के व बिन्दु पर सब  
और द व दो सीधी रेखा अ व रेखा की आमने सामने की तरफों  
से आकर सब अ और अ व द आसन्नकोन बराबर दो समकोन  
के बनते हैं

तो सब और द व एक ही सीधी रेखा में होंग

**उप०**-अगर द व और व स एक ही सीधी रेखा में  
नहों तो फर्क करो कि य व और व स एक ही सीधी  
रेखा में हैं



चूँकि अ व रेखा सब य रेखा से व बिन्दु पर मिलती है

इसलिये सब अ और अ व य आसन्न कोन मिलकर दो सम-  
कोन के बराबर हैं

सा० १३

लेकिन सब अ और अ व द कोन भी मिलकर दो समकोन  
के बराबर हैं

( वस्तुनिष्ठ फर्क )

इसलिये सब अ और अ व द कोन सब अ और अ व य कोनों  
के बराबर हैं

स्व० १, ११

इन दोनों बराबरों में से सब अ कोन निकाल डालो

इसलिये बाकी अ व द कोन बराबर है बाकी अ व य कोन  
के

स्व० ३

( ४८ )

यानी कुल अपने एक टुकड़े के बराबर है और यह बात  
नामुमकिन है स्व० ८

इसलिये य व और स व एक ही सीधी रेखा में नहीं हैं

और इसी तरह साबित हो सक्ता है कि सिवाय व द के कोई  
और सीधी रेखा भी व स के साथ मिलकर एक सीधी रेखा नहीं  
होसक्ती

इसलिये व द ही व स को साथ मिलकर एक सीधी रेखा हुई

फल-इसलिये किसी सीधी रेखा के एक बिंदु पर आद्योपान्त  
यही साबित करना था

टि० (१) यह साध्य तैरहवीं साध्य का विलोम है इसको अतिरेकयुक्त  
से साबित किया है इस साध्य में स व और व द रेखाओं के अ व रेखा की  
आमने सामने की तरफों से आकर मिलने की कौद नहो तो मुमकिन है  
कि जो कोन दो सीधी रेखा किसी तीसरी सीधी रेखा के साथ बनावें वह  
दो समकोन के बराबर होंगे लेकिन दोनों रेखा एक ही सीधी रेखा में नहीं  
जैसाकि इस तखीर में स व और व द सीधी रेखा अ व  
सीधी रेखा के साथ ऐसे दो कोन अ व अ और अ व द  
बनावें कि वह मिलकर दो समकोन के बराबर हों लेकिन  
स व और व द सीधी रेखा एक ही सीधी रेखा में नहीं



टि० (२) विद्यार्थी को गौर करने से मालूम होगा कि स व अ और  
अ व य कोनों को स व अ और अ व द कोनों के बराबर साबित करने  
में पहिली और ग्यारहवीं खयंसिद्धि दोनों का हुकम लगाना जरूर है

टि० (३) टौडहन्टर साहब ने ग्यारहवीं खयंसिद्धि को इस तरह साबित  
किया है और इस सुबूत पर उसी दस के उसूल की रू से कोई ऐतराज  
नहीं हो सक्ता है फर्ज करो कि अ व रेखा स अ द रेखा के साथ अ  
बिन्दु पर समकोन बनाती है और य फ रेखा ज य ह रेखा के साथ य  
बिन्दु पर समकोन बनाती है तो व अ स और य य ज कोन आपसमें  
बराबर होंगे



कोई अ स लखाई ले लें और अ द और  
य ह और य ज इन सबको अ स के बराबर  
बनाओ ह य ज रेखा को द अ स रेखा

पर इस तरह रखो कि ह बिन्दु द बिन्दु पर हो और ह ज रेखा की दिशा  
द स रेखा की दिशा पर हो और व और फ बिन्दु द स रेखा की एक

( ४८ )

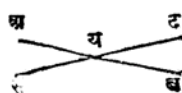
ही तरफ़ में हों तो ज बिंदु स पर पड़ेगा और य बिंदु अ बिंदु पर और य फ भी अ फ पर पड़ेगी अगर य फ रेखा अ व रेखा पर न पड़े मगर किसी और जगह पर अ क की तरह हो तो ह य फ कोन द अ क कोन के बराबर होगा और फ य ज कोन क अ स कोन के बराबर होगा लेकिन ह य फ कोन और फ य ज कोन बम्बजिब फ़र्ज़ के आपसमें बराबर हैं इसलिये द अ क और क अ स कोन आपसमें बराबर हैं लेकिन द अ व और व अ स कोन भी बम्बजिब फ़र्ज़ के आपसमें बराबर हैं और स अ व कोन स अ क कोन से बड़ा है इसलिये द अ व कोन स अ क कोन से बड़ा है और इसलिये द अ क कोन स अ क कोन से और भी ज़ियादा बड़ा है लेकिन यह साबित हो चुका है कि द अ क कोन स अ क कोन के बराबर है इसलिये द अ क कोन स अ क कोन के बराबर और उससे बड़ा भी है और यह साफ़ झूठ बात है इसलिये य फ रेखा अ व रेखा पर पड़ती है और इसलिये फ य ज और व अ स कोन आपसमें एक दूसरे को पूरा ऽ टक लेते हैं और इसलिये आपसमें बराबर हैं

### साध्य १५ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र**— अगर दो सीधी रेखा आपस में एक दूसरी की काटे तो सम्मुख कोन आपसमें बराबर होंगे

**वि० सूत्र**— फ़र्ज़ करो कि अ व और स द दो सीधी रेखा य बिंदु पर एक दूसरी की काटती हैं

तो अयस कोन बराबर होगा दयव कोन के और अयद कोन बराबर होगा सयव कोन के



**उप०** चूंकि अय रेखा स द रेखा के साथ य बिंदु पर सयअ और अय द आसन्न कोन बनाती है

यह दोनों कोन मिलके दो समकोन के बराबर हैं सा० १३ फिर चूंकि द य रेखा अ व रेखा के साथ य बिंदु पर व य द और द य अ आसन्न कोन बनाती है

यह दोनों कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं सा० १३ लेकिन यह साबित हो चुका है कि सयअ और अयद कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं



( ५० )

**इसलिये सयअ और अयद कोन वयद और अयद कोनों के बराबर हैं**

**इन बराबरों में से अयद कोन निकाल डाला**

**इसलिये बाकी सयअ कोन बराबर है बाकी वयद कोन के स्व० ३ और इसी तरह साबित होसक्ता है कि सयव कोन अयद कोन के बराबर है**

**फल इसलिये अगर दो सीधी रेखा एक दूसरी को किसी बिन्दु पर काटें आद्योपान्त यहो साबित करना था**

टि० (१) ऊपर का सुवृत इस तरह लिखने से संचेप होसक्ता है कि सन्मुख के कोन आपसमें बराबर हैं क्योंकि दोनों कोनों में से हर एक का पूरक एक ही कोन है

टि० (२) अनुमान जो उक्तेदस ने इस साध्य के नीचे लिखे हैं हमने उनको इस कृतिताव में माकूल वजहों के सबब तेरहवीं साध्य के नीचे रक्खा है

टि० (३) उक्तेदस ने इस साध्य के बिलोम को कि “अगर चार सीधी रेखा किसी बिन्दु पर मिल कर चार कोन ऐसे बनावें कि उनमें से आमने सामने के दो दो कोन आपस में बराबर हों तो उनमें से दो दो रेखा एक एक सीधी रेखा में होंगी” नहीं साबित किया है वह इस तरह साबित होसक्ता है

फर्ज करो कि अय, सय, वय और दय चार सीधी रेखा (पन्द्रहवीं साध्य की तखीर देखो) य बिंदु पर मिलकर ऐसे चार कोन बनाती हैं कि उनमें से आमने सामने के दो दो कोन बराबर हैं यानी अयस और वयद कोन आपस में बराबर हैं और सयव और अयद कोन आपस में बराबर हैं तो अय और वय रेखा एक सीधी रेखा में होंगी और सय और दय रेखा एक सीधी रेखा में होंगी

चूंकि अयस कोन बराबर है वयद कोन के और सयव कोन बराबर है अयद कोन के इसलिये अयस और सयव कोन मिलकर वयद और दय अ कोनों के बराबर हैं (स्व० ६) लेकिन यह चारों कोन मिलाकर चार समकोन के बराबर हैं (अनु० ३ सा० १३) इसलिये अयस और सयव कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं और इसलिये अय और वय एकही सीधी रेखा में हैं (सा० १४) और इसी तरह यह भी साबित होसक्ता है कि सय और दय एकही सीधी रेखा में हैं

**सवालात इम्तिहान शकल ७ से १५ तक**

(१) सातवीं शकल की तौसरी सरत खींचो और बयान करो कि सुवृत की क्यों जरूरत नहीं है



(५१)

(२) आठवीं शकल को अन्वी साधन से सिद्धि करो ताकि सातवीं साध्य की ज़रूरत न रहे

(३) क्या नौवीं साध्य में यह ज़रूर नहीं है कि समन्निवाहु त्रिभुज अ से दूर बनाया जावे

(४) बताओ कि पहिली साध्य में किस तरह रेखा के दो बराबर हिस्से कर सकते हैं

(५) साबित करो कि ग्यारहवीं शकल नवीं शकल की एक खास सूरत है

(६) दो खत सुस्तकीम (सीधी रेखा) दिखा प्रामिल नहीं रखते क्या यह अनुमान पहिले भी किसी साध्य में मान लिया गया है

(७) किन सूरतों में वे सीधी रेखा जो त्रिभुज के अन्तः कोनों के दो बराबर हिस्से करते हैं त्रिभुज के कोनों के सामने के भुजों या भुज को भी दो बराबर भागों में बांटते हैं (जवाब) सिर्फ एक भुजा या नौ आधार को जब समन्निवाहु त्रिभुज होता है और कुल भुजों को जब समन्निवाहु त्रिभुज होता है

(८) क्या १२ वीं साध्य में अपरिमित रेखा दी हुई होने की शर्त ज़रूर है

(९) १३ वीं शकल में कौनसी वस्तुपपाद्य साध्या की ज़रूरत पड़ी है क्या किसी प्रमेयोपपाद्य साध्य की भी ज़रूरत पड़ी है (जवाब) नहीं सिर्फ स्वयं सिद्धियों की

(१०) अगर दो रेखा एक दूसरे को काटें तो वे कितने कोने बनावेंगी

(११) १४ वीं शकल में कौनसे तीन खत एक बिन्दु में होकर गुजरते हैं

(१२) १४ वीं साध्य के दावे में कौनसी शर्त की ज़रूरत है

(१३) १५ वीं साध्य का बिलोम बयान करो और साबित करो

(१४) १३, १४, १५, साध्यों का क्या मज़मून है (जवाब) कोन जो एक बिन्दु पर बनते हैं

### साध्य १६ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र-- अगर किसी त्रिभुज की एक भुज बढ़ाई जाय तो वहिः कोन अपने सामने के हर एक अन्तः कोन से बड़ा होगा

वि० सूत्र-- फ़र्ज़ करो कि अब स त्रिभुज की व स भुज किसी द बिन्दु तक बढ़ाई गयी है

तो अब स द वहिः कोन अपने सामने के हर एक स अब और अब स अन्तः कोन से बड़ा होगा

अं० अस के य बिन्दु पर दो बराबर हि-

स्से करो

सा० १०



(५२)

और वय मिलाओ अवा० १

वय की किसी फ बिन्दु तक बढ़ाओ अवा० २

और य फ बराबर वय के काटलो सा० ३

और स फ मिलाओ अवा० १

उप०-- चूंकि य स बराबर अ य के और य फ बराबर वय के बनायो गयी है

यानी अवय और स फ य दो त्रिभुजों में अ य और वय दो भुज स य और य फ दो भुजों के अलग२ बराबर हैं

और अ य व कोन स य फ कोन के बराबर है सा० १५

इसलिये अब आधार स फ आधार के बराबर है और अवय त्रिभुज स फ य त्रिभुज के बराबर है और एक त्रिभुज के बाकी कोन अलग२ दूसरे त्रिभुज के बाकी कोनों के बराबर हैं यानी व ह कोन आपस में बराबर हैं जिनके सामने की भुज बराबर हैं सा० ४

इसलिये व अ य कोन बराबर है फ स य कोन के

लेकिन अस द कोन फ स य कोन से बड़ा है स्व० ८

इसलिये अस द कोन व अस कोन से बड़ा है

इसी तरह अगर अस भुज ज बिन्दु तक बढ़ायी जाय और व स के दो बराबर हिस्से किये जाय तो यह साबित हो सक्ता है कि व स ज कोन अव स कोन से बड़ा है

लेकिन व स ज कोन अस द कोन के बराबर है

इसलिये अ स द कोन अ स व कोन से बड़ा है

फल- इसलिये अगर किसी त्रिभुज की एक भुज बढ़ायी जाय तो वहिः कोन आद्योपान्त यही साबित करना था

टि० (१) तालिब इस्लाम को चाहिये कि अभ्यास के लिये दूसरे हिस्से के सूत्र को जिसकी तरफ इशारा किया है लिख डाले जिससे इस साध्य की सच्चाई अच्छी तरह उसके जी में समा जावे

(५३)

(८०) (२) इस साध्य और आगे की वाज़ी२ साध्यों के सावित करने में इस स्वयंसिद्धि को मान लिया है कि अगर दो बराबर चीज़ों में से एक किसी तीसरी चीज़ से बड़ी हो तो दूसरी भी उससे बड़ी होगी

### अभ्यास

(२६) व सप्त त्रिभुज के तीनों अन्तः कोनों का योग (१६ वीं साध्य देखो) त्रिभुज अ व स के तीनों अन्तः कोनों के योग के बराबर है

(३०) किसी सीधी रेखा पर एक बिंदु से एक से ज़्यादा लम्ब नहीं गिर सकते हैं

(३१) अगर किसी बिंदु से एक सीधी रेखा को एक ही हुई सीधी रेखा के साथ एक अधिक कोन और एक न्यून कोन बनावे खींची जाय और उसी बिंदु से उसी रेखा पर एक लम्ब गिराया जाय तो सावित करो कि लम्ब न्यून कोन की तरफ़ गिरेगा

(३२) एक बिंदु से किसी सीधी रेखा तक दो से ज़्यादा बराबर रेखा नहीं खिच सकती हैं

### साध्य १७ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र त्रिभुज के हर दो कोन मिलकर दो समकोन से छोटे होते हैं

वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि अब स एक त्रिभुज है तो उसके हर दो कोन मिलकर दो समकोन से कम होंगे

अं० किसी व स भुज को द तक बढ़ाओ



उप० चूँकि अ स द कोन अब स त्रिभुज का बहिः कोन है इसलिये अ स द कोन अपने सामने के अब स अन्तः कोन से बड़ा है

सा० १६

इन दोनों बराबरों में से हर एक में अ स व कोन मिलाओ

इसलिये अ स द और अ स व कोन मिलकर अब स और अ स व कोनों से बड़े हैं

ख० ४

(५४)

लेकिन अ स द और अ स व कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं

सा० १३

इसलिये अ व स कोन और अ स व कोन मिलकर दो समकोन से कम हैं

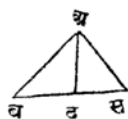
इसी तरह यह भी साबित होसक्ता है कि व अ स और अ स व कोन भी मिलकर दो समकोन से कम हैं

और व अ स और अ स व कोन भी मिलकर दो समकोन से कम हैं

फल इसलिये त्रिभुज के हर दो कोन आद्योपान्त यहो साबित करना था

टि० (१) यह साध्य प्रकृली साध्य का सिर्फ एक अनुमान मालूम देती है ज़ाहिरा खगसिद्धि १२ की जिसका यह विलोम है टीका के लिये रक्खी गई है यह और सोलहवीं दोनों साध्य इस अध्याय की बत्तीसवीं साध्य में शामिल है

टि० (२) सत्तरहवीं साध्य त्रिभुज की बगैर किसी भुजा के बढ़ाने के इस तरह साबित होसक्ती है व स में कोई बिंदु द लो और अ द मिलाओ



चूँकि अ द स कोन अ व स कोन से और अ द व कोन अ स व कोन से बड़ा है (सा० १६) इसलिये अ द व और अ द स कोन मिलकर अ व स और अ स व कोनों से बड़े हैं लेकिन अ द व और अ द स कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं (सा० १३) इसलिये अ स व और अ व स कोन मिलकर दो समकोन से कम हैं इसी तरह यह भी साबित होसक्ता है कि व अ स और अ स व कोन मिलकर दो समकोन से कम हैं और व अ स और अ व स कोन भी मिलकर दो समकोन से कम हैं

## अभ्यास

(३३) त्रिभुज के तीनों अन्तः कोन मिलकर तीन समकोन से छोटे होते हैं

(३४) त्रिभुज के हर दी बहिः कोन मिलकर दो समकोन से और तीनों बहिः कोन मिलकर तीन समकोन से ज़ियादा होते हैं

(५५)

## साध्य १८ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र--** हर त्रिभुज में बड़ी भुज के सामने का कोन बड़ा होता है

**वि० सूत्र--** फ़र्ज करो कि अ व स एक त्रिभुज है और उस को अ स भुज अ व भुज से बड़ी है

तो अ व स कोन अ स व कोन से बड़ा होगा

**अं०--** चूँकि अ स भुज अ व भुज से बड़ी है उसमें से अ द बराबर अ व के काटलो (सा० ३)

और व द मिलाओ

अवा० १



**उप०--** चूँकि अ द व कोन द व स त्रिभुज का बहिः कोन है इसलिये अ द व कोन अपने सामने के व स द अन्तः कोन से बड़ा है

सा० १६

लेकिन अ द व कोन बराबर है अ व द कोन के

सा० ५

इसलिये अ व द कोन बड़ा है व स अ कोन से

इसलिये अ व स कोन और भी ज़ियादा बड़ा है व स अ कोन से

**फल--** इसलिये त्रिभुज की बड़ी भुज के सामने का कोन आद्यो-पान्त यही साबित करना था

**अनुमान--** विषमबाहु त्रिभुज के कोन नाबराबर होते हैं

## अभ्यास

(३२) अ व स द चतुर्भुज की अ द भुज सब भुजों से बड़ी है और व स भुज सबसे छोटी है तो साबित करो कि अ व स कोन अ द स कोन से और व स द कोन व अ द कोन से बड़ा है

(३६) त्रिभुज के उस भुज पर जो बाकी दो भुजों में से किसी से छोटी नहीं है जो लम्ब सामने के कोन से डाला जाता है वह त्रिभुज के भीतर पड़ता है

(५६)

## साध्य १६ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र हर त्रिभुज में बड़े कोन के सामने की भुज बड़ी होती है

वि० सूत्र-- फ़र्ज़ करो कि अवस एक त्रिभुज है जिसका असव कोन असव कोन से बड़ा है तो अस भुज अव भुज से बड़ी होगी



उप०— अगर अस भुज अव भुज से बड़ी नहीं है तो वह उसके बराबर या उससे छोटी है

अगर अस बराबर है अव के तो अवस कोन भी बराबर है असव कोन के

सा० ५

लेकिन यह कोन आपस में बराबर नहीं हैं

फ़र्ज़

इसलिये अस भी अव के बराबर नहीं है

अगर अस छोटी है अव से तो अवस कोन भी छोटा है असव कोन से

सा० १८

लेकिन अवस कोन असव कोन से छोटा नहीं है फ़र्ज़

इसलिये अस भी अव से छोटी नहीं है

और यह साबित हो चुका है कि अस बराबर नहीं है अव के इसलिये अस बड़ी है अव से

फल—इसलिये हर त्रिभुज में बड़े कोन के सामने की भुज आद्योपान्त यही साबित करना था

टि० (१) यह साध्य अठारहवीं साध्य का बिलोम है और दूटो साध्य के साथ वही सम्बन्ध रखती है जो अठारहवीं साध्य पाँचवीं साध्य के साथ रखती है यह सम्बन्ध इन साध्यों में से दो दो को मिलाकर इस तरह बयान करने से मालूम होगा “त्रिभुज का एक कोन दूसरे कोन के बराबर



(५७)

(सा० ५) या उससे बड़ा या छोटा (सा० १८) होगा जैसा कि पहिले कोन के सामने की भुज दूसरे कोन के सामने की भुज के बराबर या उससे बड़ी या छोटी हो" और "त्रिभुज की एक भुज दूसरी भुज के बराबर (सा० ६) या उससे बड़ी या छोटी (सा० १९) होगी जैसा कि पहिली भुज के सामने का कोन दूसरी भुज के सामने के कोन के बराबर या उससे बड़ा या छोटा हो

इन चारों साध्यों के आपस के सम्बन्ध को हम इस तरह पर भी बयान करके ज़ाहिर करते हैं

- |   |          |                         |    |                 |
|---|----------|-------------------------|----|-----------------|
| { | साध्य ५  | अगर अब भुज = अस त्रिभुज | तो | स कोन = ब कोन   |
|   | साध्य ६  | अगर स कोन = ब कोन       | तो | अब भुज = अस भुज |
|   | साध्य १८ | अगर अब भुज > अस भुज     | तो | स कोन > ब कोन   |
|   | साध्य १९ | अगर स कोन > ब कोन       | तो | अब भुज > अस भुज |

दो दो साध्य जो कोष्ट रेखाओं के अन्दर हैं एक दूसरी का विलोम हैं क्योंकि जो बात एक में कल्पित अर्थ की जगह पर है वह दूसरी में फल की जगह पर है

टि० (२) साध्य १९ अतिरेक युक्ति से साबित की गई है

## अभ्यास

(३७) अब रेखा अब स त्रिभुज के अ कोन के दो बराबर हिस्से करती है और उसकी ब स भुज से द बिंदु पर मिलती है साबित करो कि ब अब बड़ी है ब द से और स अब बड़ी है स द से

(३८) अगर बर्गक्षेत्र के किसी अ कोन से एक रेखा उसके सामने की भुजों में से एक को काटती हुई और दूसरी के बड़े हुए हिस्से से फ बिंदु पर मिलती हुई खींची जाय तो अ फ उस बर्गक्षेत्र के कर्ण से बड़ी होगी

(३९) जितनी सीधी रेखा किसी बिन्दु से एक दी हुई रेखा तक खींची जाय उनमें से लम्ब सबसे छोटी होगी और जो रेखा लम्ब के नज़दीक होगी वह दूर की रेखा से छोटी होगी

## साध्य २० प्रमेयोपपाद

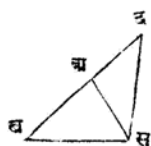
सा० सूत्र- त्रिभुज की हर दो भुज मिलकर तीसरी से बड़ी होती हैं

(५८)

वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि अवस एक त्रिभुज है

तो उसकी हर दो भुज मिलकर तीसरी से बड़ी होंगी

यानी अव और अस मिलकर वस से



और अव और वस मिलकर अस से और वस और सअ मिलकर अव से बड़ी होंगी

अ० वअ की किसी द बिन्दु तक बढ़ाओ

अवा० २

अद बराबर अस के बनाओ

सा० ३

और दस मिलाओ

अवा० १

उप० चूँकि अद बराबर अस के बनाई गयी है

इसलिये असद कोन बराबर है अदस कोन के सा० ५

लेकिन वसद कोन असद कोन से बड़ा है । स्व० ८

इसलिये वसद कोन अदस कोन से भी बड़ा है

चूँकि दवस त्रिभुज में वसद कोन बड़ा है वदस कोन

से और बड़े कोन के सामने की भुज बड़ी होती है सा० १८

इसलिये वद बड़ी वस से

लेकिन वद बराबर है वअ और अस के क्योंकि अद

बराबर है अस के

इसलिये वअ और अस मिलकर बड़ी हैं वस से

इसी तरह यह भी साबित होसक्ता है कि अव और वस मिलकर अस से और वस और सअ मिलकर अव से बड़ी हैं

फ़ल इसलिये त्रिभुज की हर दो भुज मिलकर आद्योपान्त यही साबित करना था

(५८)

टि० (१) याद रखो कि जिन दो भुजों को तीसरी से बड़ी साबित करना चाहते हो उन दो भुजों में से किसी एक भुज को उस तरफ बढ़ाने से जिधर वह दोनों भुज मिलती है और वृद्धि हिस्से को दूसरी के बराबर बनाने से यह साध्य साबित होगी



टि० (२) यह साध्य इस तरह भी साबित हो सकता है

व अ स कोन के अ य रेखा से दो बराबर हिस्से करो (सा० ६) अब व य अ कोन य अ स कोन से बढ़ा है (सा० १६) लेकिन य अ स कोन य अ व कोन के बराबर बनाया गया है इसलिये व य अ कोन य अ व कोन से बढ़ा है और इसलिये अ व बढ़ी है व य से (सा० १६) इसी तरह साबित होसकता है कि अ स बढ़ी है य स से इसलिये व अ और अ स मिलकर व स से बढ़ी है

टि० (३) इस साध्य का यह अनुमान हो सकता है कि दो बिन्दुओं के दर्मियान सीधी रेखा सब से छोटी दूरी है क्योंकि अ बिन्दु व स रेखा से कैसा ही नज़दीक क्यों नहो व स हमेशा व अ और स अ से छोटी है

टि० (४) इस साध्य की मदद से यह आसानी से साबित होसकता है कि त्रिभुज की किसी दो भुजों के दर्मियान का फर्क तीसरी भुज से छोटा होता है क्योंकि जिस सूरत में व अ और अ स मिलकर व स से बढ़ी है अगर इन दोनों का बराबर में से अ स निकाल ली जावे तो व अ बढ़ी होगी उस फर्क से जो व स और अ स के दर्मियान है

## अभ्यास

(४०) त्रिभुज की तीनों भुज मिलकर हर भुज के दूने से बढ़ी होती है

(४१) अगर किसी बिन्दु से त्रिभुज के तीनों कोनों तक रेखा खींची जाय तो यह तीनों रेखा मिलकर त्रिभुज की तीनों भुजों के योग के आधे से बढ़ी होगी

(४२) चतुर्भुज को चारों भुज मिलकर दोनों कर्णों के योग से बढ़ी होती है

(४३) त्रिभुज की दो भुज मिलकर उस सीधी रेखा के जो तीसरी भुज के बीचों बीच के बिन्दु से उस भुज के सामने के कोन तक खींची जाय दूने से बढ़ी होगी

(४४) अगर किसी बिन्दु से चतुर्भुज के चारों कोनों तक चार सीधी रेखा खींची जाय तो वह चारों मिलकर चतुर्भुज की चारों भुजों के आधे से बढ़ी होगी

(४५) हर चतुर्भुज के कर्णों का योग उन चार रेखाओं के योग से छोटा होता है जो किसी बिन्दु से चतुर्भुज के चारों कोनों तक खींची जाय परन्तु उस बिन्दु पर कर्ण एक दूसरे को न काटे

(६०)

(४६) दो हुई सीधी रेखा में एक ऐसा बिंदु दर्शाओ कि जिसकी दूरियां दो बिंदुओं से जो दो हुई रेखा के एक ही तरफ में हैं मिलकर उस रेखा के और बिंदुओं में से हर एक की दूरियों से कम हों

### साध्य २१ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** अगर किसी त्रिभुज की एक भुज के सिरों से दो सीधी रेखा एक बिंदु तक जो उस त्रिभुज के अन्दर है खींची जाय तो वह दोनों सीधी रेखा मिलकर त्रिभुज की बाकी भुजों से छोटी होंगी लेकिन उन रेखाओं के दर्मियान का कोन उन भुजों के दर्मियान के कोन से बड़ा होगा

**वि० सूत्र** फर्ज करो कि अबस एक त्रिभुज है और उसकी बस भुज के ब और स सिरों से द बिंदु तक जो उस त्रिभुज के अन्दर है वद और स द सीधी रेखा खींची गई हैं



तो व द और स द मिलकर त्रिभुज की अब और अस भुजों से छोटी होंगी लेकिन उनके दर्मियान का व द स कोन त्रिभुज के ब अ स कोन से बड़ा होगा

**अ० व द** को बढ़ाओ कि वह अ स से य बिंदु पर मिले

**उप०** चूंकि त्रिभुज की दो भुज मिलकर तीसरी से बड़ी होती है

सा० २०

इसलिये अ व य त्रिभुज की दो भुज व अ और अ य मिलकर व य भुज से बड़ी है

इन नाबराबरों में से हर एक में य स ज़ियादा करो

तो व अ और अ स मिलकर बड़ी हुई व य और य स से और चूंकि स य द त्रिभुज की स य और य द दो भुज

( ६१ )

मिलकर बड़ी हैं स द भुज से

सा० २०

और इन नाबराबरों में से हर एक में द व ज़ियादा करदो  
तो स य और य व मिलकर बड़ी हईं स द और द व से  
लेकिन यह साबित होचुका है कि स अ और अ व मि-  
लकर बड़ी हैं स य और य व से

इसलिये व अ और अ स मिलकर और भी ज़ियादा  
बड़ी हैं व द और द स से

फिर चूँकि त्रिभुज का बहिः कोन अपने सामने के अन्तः कोन  
से बड़ा होता है

सा० १६

इसलिये स द य त्रिभुज का व द स बहिः कोन बड़ा है  
स य द अन्तः कोन से

इसी दलील से अ व य त्रिभुज का स य द बहिः कोन  
बड़ा है व अ स अन्तः कोन से

इसलिये व द स कोन और भी ज़ियादा बड़ा है व अ स  
कोन से

इस वास्ते अगर किसी त्रिभुज की एक भुज के सिरों से आ-  
द्योपान्त यही साबित करना था

टि० इस साध्य में अगर त्रिभुज की भुज के सिरों से सीधी रेखा खींची  
जाने की क़ैद नहो तो समझिन होसक्ता है कि दो सीधी रेखा जो उस  
भुज के किसी और दो बिन्दुओं से खींची जायं त्रिभुज की बाकी दो भुजों  
से बड़ी या उनकी बराबर हों लेकिन दोनों रेखा मिलकर उन भुजों के दूने  
से हमेशा कम रहेंगी अगर भुज जिसके सिरों से रेखा खींची जायं सम-  
त्रिबाहु त्रिभुज की भुज हो या ऐसे समद्विबाहु त्रिभुज का आधार हो कि  
जिसकी हर भुजा आधार से बड़ी हो तो भुज के सिरों से रेखा खींची  
जाने की क़ैद की क़क़ ज़रूरत नहीं है दोनों सीधी रेखा मिलकर स्वाह  
वह भुज के सिरों से या उस भुज के किसी और दो बिन्दुओं से खींची गयी  
है हमेशा समत्रिबाहु त्रिभुज की बाकी भुजों या समद्विबाहु त्रिभुज की  
भुज से छोटी होगी

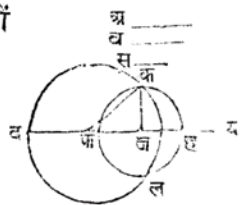
( ६२ )

## साध्य २२ वस्तूपपाद्य

**सा० सूत्र** एक त्रिभुज बनाओ जिसकी भुज अलग अलग बराबर हों दी हुई ऐसी तीन सीधी रेखाओं के कि उनमें से हर एक दो मिलकर तीसरी से बड़ी हैं

**वि० सूत्र** फर्ज करो कि **अ**, **व** और **स** ऐसी तीन दी हुई सीधी रेखा हैं कि उनमें से हर एक दो मिलकर तीसरी से बड़ी है यानी **अ** **अ** **र** **व** मिलकर बड़ी हैं **स** से और **अ** और **स** मिलकर बड़ी हैं **व** से और **व** और **स** मिलकर बड़ी हैं **अ** से

ऐसा त्रिभुज बनाना है कि उसकी तीनों भुज अलग अलग बराबर हों **अ**, **व** और **स** के



**अ०-दृ** ऐसी सीधी रेखा खींचो कि

वह **द** पर परिमिति हो लेकिन **य** की तरफ चाहें जितनी बढ़ सके

**द** **फ** बराबर **अ** के और **फ** **ज** बराबर **व** के और **ज** **ह** बराबर **स** के बनाओ

सा० ३

**फ** केंद्र से **फ** **द** दूरी पर **द** **क** **ल** वृत्त खींचो अवा० ३ और **ज** केंद्र से **ज** **ह** दूरी पर **ह** **क** **ल** वृत्त खींचो अवा० ३

**क** बिन्दु से जहां दोनों वृत्त आपस में एक दूसरे को काटते हैं **क** **फ** और **क** **ज** रेखा **फ** और **ज** बिन्दुओं तक खींचो तो **क** **फ** **ज** त्रिभुज की भुज **अ**, **व** और **स** सीधी रेखाओं के अलग २ बराबर होंगी

**उप०** चंकि **द** **क** **ल** वृत्त का **फ** केंद्र है



( ६३ )

इसलिये फ क बराबर है फ द के परि० १५

लेकिन फ द बराबर अ के बनायी गयी है

इसलिये फ क बराबर अ के है स्व० १

फिर चूंकि ह क ल वृत्त का ज केंद्र है

इसलिये ज क बराबर है ज ह के परि० १५

लेकिन ज ह बराबर स के बनायी गयी है

इसलिये ज क बराबर स के है स्व० १

और फ ज बराबर व के बनायी गयी है

इसलिये क फ, फ ज और ज क तीन सीधी रेखा

अलग २ बराबर हैं अ, व और स के

और इसलिये क फ ज त्रिभुज की क फ, फ ज और

ज क तीनों भुज अलग अलग बराबर हैं दी हुई तीन अ, व

और स सीधी रेखाओं के और ऐसे ही त्रिभुज के बनाने की ज़रूरत थी

टि० १ दी हुई तीन सीधी रेखाओं में से हर एक दो का मिलकर तीसरी से बड़ी होना इसलिये ज़रूर है क्योंकि बगैर इस शर्त के साथ का हल होना नामुमकिन है

टि० २ बाज लोग उल्टे इस पर यह ऐतराज करते हैं कि वृत्तों का जो इस साथ के हल करने के लिये खींचे गये हैं आपस में कटना साबित नहीं किया है लेकिन इस शर्त पर कि द फ, फ ज और ज ह सीधी रेखाओं में से हर एक दो मिलकर तीसरी से बड़ी हैं खयाल करने से साफ़ जाहिर है कि वृत्त आपस में एक दूसरे को काटेंगे क्योंकि इस किताब का प्रणने वाला जो ज़रा भी अज्ञ रखता होगा फौरन समझ जावेगा कि वृत्त जो फ केंद्र से फ द दूरी पर खींचा है फ ह सीधी रेखा को फ और ह बिंदुओं के दर्मियान काटेगा क्योंकि फ ह बड़ी है फ द से और वृत्त जो ज केंद्र से ज ह दूरी पर खींचा है द ज सीधी रेखा को द और ज बिंदुओं के दर्मियान काटेगा क्योंकि द ज बड़ी है ज ह से और यह वृत्त ज़रूर आपस में काटेंगे क्योंकि फ द और ज ह मिलकर फ ज से बड़ी हैं

( ६४ )

टि० ३ इस अध्याय की पहली साध्य इस साध्य की एक खास मूरत है क्योंकि इस साध्य में अगर अ, व और स आपस में बराबर हों तो यह साध्य और पहली साध्य एकही हो जायंगी यह भी ज़ाहिर है कि फ ज आधार की दूसरी तरफ एक और ऐसा त्रिभुज बन सकता है कि जिसकी भुज दी हुई तीन सीधी रेखाओं के बराबर हों

### अभ्यास

( ४७ ) दिये हुए त्रिभुज के बराबर त्रिभुज बनाओ

( अ ) दिये हुए ऋजुभुज त्रिभुज के बराबर ऋजुभुज त्रिभुज बनाओ

### साध्य २३ वस्तुपपाद्य

सा० सूत्र दी हुई सीधी रेखा के दिये हुए बिन्दु पर दिये हुए सरल कोन के बराबर कोन बनाओ

वि० सूत्र फर्ज करो कि अव दी हुई सीधी रेखा है और उसमें अ दिया हुआ बिन्दु है और द स य दिया हुआ सरलकोन है

अ व सीधी रेखा के अ बिन्दु पर कोन बनाना है जो द स य कोन के बराबर हो



अं० सद और स य में द और य बिन्दु लो

द य मिलाओ

अवा० १

अ व पर अ फ ज एक ऐसा त्रिभुज बनाओ कि उसकी भुज तीन सीधी रेखाओं सद, द य और स य के बराबर इसतरह से हों कि अ फ बराबर हो सद और फ ज बराबर द य के और ज अ बराबर य स के

सा० २२

तो फ अ ज कोन बराबर द स य कोन के होगा

उप० चूंकि फ अ और अ ज अलग २ बराबर हैं द स और स य के

और फ ज आधार बराबर है द य आधार के

( ६५ )

इसलिये **फ अ ज** कोन बराबर है **द स य** कोन के सा०  
 इसलिये दो हुई **अ व** सीधी रेखा के **अ** बिन्दु पर **फ अ ज**  
 कोन दिये हुए **द स य** सरलकोन के बराबर बन गया—और  
 इसी कोन के बनाने की ज़रूरत थी

### अभ्यास

( ४८ ) अगर किसी त्रिभुज के दो कोन मिलकर तीसरे कोन के बराबर हों तो उस त्रिभुज के दो समदिवाहु त्रिभुज बन सकते हैं

( ४९ ) अगर **अ व स** त्रिभुज के **अ** और **व** कोन मिलकर **स** कोन के बराबर हों तो **अ व** उस सीधी रेखा से जो **स** कोन से **अ व** के बीचों बीच के बिन्दु तक खींची जाय दूनों होगी

( ५० ) एक त्रिभुज का आधार और आधार पर का एक कोन और उसकी भुजों का योग मालूम है तो उस त्रिभुज को बनाओ

( ५१ ) एक त्रिभुज के भुज और उन भुजों के बीच का कोन मालूम है उस त्रिभुज को बनाओ

( ५२ ) एक त्रिभुज के भुज और उन भुजों में से एक के सामने का कोन मालूम है उस त्रिभुज को बनाओ

( ५३ ) एक त्रिभुज का आधार और आधार पर का एक कोन और उसकी भुजों का योग या फर्क मालूम है तो उस त्रिभुज को बनाओ

( ५४ ) दो बिन्दु दिये हुए हैं जिनमें से एक बिन्दु एक दी हुई रेखा में है उस दी हुई रेखा में एक और ऐसा बिन्दु दर्याफ्त करो कि दिये हुए बिन्दुओं से उसकी दूरियों का जोड़ या फर्क एक दी हुई लम्बाई के बराबर हो और यह भी साबित करो कि हर हालत में ऐसे दो दो बिन्दु दर्याफ्त हो सकते हैं

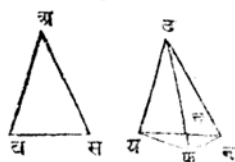
### साध्य २४ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग २ बराबर हों लेकिन कोन जो एक त्रिभुज की इन दो भुजों से बना है बड़ा हो दूसरे त्रिभुज के उस कोन से जो इन भुजों की बराबर भुजों से बना है तो उस त्रिभुज का जिसका कोन बड़ा है आधार बड़ा होगा दूसरे त्रिभुज के आधार से

**वि० सूत्र** फर्क करो कि **अ व स** और **द य फ** ऐसे दो त्रिभुज हैं कि उनकी **अ व** और **अ स** भुज अलग २ बराबर

( ६६ )

हैं द य और द फ भुजों के यानी अ व बराबर है द य के और अ स बराबर है द फ के लेकिन व अ स कोन बड़ा है य द फ कोन से



तो व स आधार बड़ा होगा य फ आधार से

अ० फर्ज करो कि द य और द फ में द य बड़ा नहीं है द फ से

द य के द बिंदु पर और उसके उस तरफ जिधर द फ है य द ज कोन बराबर व अ स कोन के बनाओ सा० २३

द ज बराबर द फ या अ स के बनाओ सा० ३

और य ज और ज फ मिलाओ अवा० १

उप० चूंकि द य बराबर है अ व के और द ज बराबर अ स के यानी त्रिभुज द य ज की दो भुज द य और द ज त्रिभुज अ व स की अ व और अ स दो भुजों के अलग २ बराबर हैं

और य द ज कोन व अ स कोन के बराबर बनाया गया है

इसलिये य ज आधार बराबर है व स आधार के सा० ४

और चूंकि द फ ज त्रिभुज में द ज बराबर है द फ के

इसलिये द फ ज कोन बराबर है द ज फ कोन के सा० ५

लेकिन द ज फ कोन बड़ा है य ज फ कोन से स्व० ६

इसलिये द फ ज कोन भी बड़ा है य ज फ कोन से

और इसलिये य फ ज कोन और भी ज़्यादा बड़ा है

( ६७ )

**य ज फ कोन से**

और चूँकि **य फ ज** त्रिभुज में **य फ ज** कोन बड़ा है

**य ज फ** कोन से और बड़े कोन से सामने की भुज बड़ी होती है

सा० १८

इसलिये **य ज** भुज बड़ी है **य फ** भुज से

लेकिन **य ज** बराबर **व स** के सावित होचुकी है

इसलिये **व स** बड़ी है **य फ** से

**फल** इसलिये अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के आद्योपान्त-यही सावित करना था

टि० १ इस साध्य में उक्तैदम ने इस बात को बगैर सावित किये मान लिया है कि **द ह** छोटी है **द फ** से यानी **फ** बिंदु **य ज** रेखा के नीचे है इसको हम इस तरह सावित कर सकते हैं चूँकि **द ह ज** कोन त्रिभुज **द य ह** का वहिःकोन है इसलिये **द ह ज** कोन बड़ा है **द य ज** अन्तःकोन से ( सा० १६ ) और चूँकि **द य ज** त्रिभुज में **द ज** बड़ी है **द य** से या उससे बराबर है इसलिये **द य ज** कोन बड़ा है **द ज य** कोन से या उससे बराबर है ( सा० १८, ५ ) लेकिन यह सावित होचुका है कि **द ह ज** कोन **द य ज** कोन से बड़ा है इसलिये **द ह ज** कोन **द ज ह** कोन से बड़ा है इसवास्ते **द ज** बड़ी है **द ह** से ( सा० १६ ) लेकिन **द ज** बराबर है **द फ** के इसलिये **द फ** बड़ी है **द ह** से यानी **फ** बिंदु **य ज** रेखा के नीचे है

टि० २ इस साध्य में यह श्रुत कि **द य** भुज **द फ** भुज से बड़ी नहीं है मिससन साहब ने ज़िवादा की है अगर यह श्रुत नहीं तो साध्य की तीन मूरतों होसکتी हैं यानी **फ** बिंदु **य ज** रेखा में हो या उससे ऊपर या नीचे हो अगर **फ** बिंदु **य ज** रेखा में हो तो उस मूरत में साफ़ जाहिर है कि **य फ** छोटी होगी **य ज** से और अगर **फ** बिंदु **य ज** रेखा के ऊपर है तो **द फ** और **य फ** मिलकर **द ज** और **य ज** से छोटी होंगी ( सा० २१ ) और चूँकि **द फ** और **द ज** आपस में बराबर हैं इसलिये **य फ** छोटी होगी **य ज** से

टि० ३ यह साध्य इस तरह भी सावित होसکتी है

**द य फ** त्रिभुज को **अ व स** त्रिभुज पर इस तरह रक्खा कि **द य**

( ६८ )

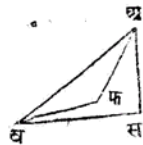
सुच अ व भुज को पूरा २ टुक लेवे तो चूंकिय द फ कोन ब अ स कोन से छोटा है द फ भुज ब अ और स अ भुजों के दमियान पड़ेगी और फ बिंदु या तो व स पर या उससे ऊपर या नीचे पड़ेगा

पहली सूरत अगर फ बिंदु ब स आधार पर पड़ता है तो ब स बड़ी है व फ से इसलिये ब स बड़ी है य फ से



दूसरी सूरत अगर फ बिंदु व स आधार के ऊपर पड़ता है तो अ स और व स मिलकर बड़ी है अ फ और ब फ से (सा० २१)

और अ फ और अ स आपस में बराबर हैं इसलिये व स बड़ी है व फ से इसलिये ब स बड़ी है य फ से



तीसरी सूरत अगर फ बिंदु ब स आधार से नीचे पड़ता है

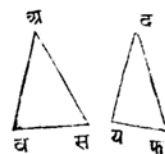
फर्ज करो कि अ फ और व स एक दूसरी को ज बिंदु पर काटती हैं तो चूंकिय अ ज और ज स मिलकर बड़ी है अ स से (सा० २०) और फ ज और ज व मिलकर बड़ी है व फ से इसलिये अ फ और व स मिलकर बड़ी है अ स और ब फ से लेकिन अ फ बराबर है अ स के इसलिये व स बड़ी है व फ से इसलिये ब स बड़ी है य फ से



## साध्य २५ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग २ बराबर हों लेकिन एक त्रिभुज का आधार दूसरे त्रिभुज के आधार से बड़ा हो तो जिस त्रिभुज का आधार बड़ा है उसकी भुजों से बना हुआ कोन दूसरे त्रिभुज के उस कोन से जो उन भुजों की बराबर भुजों से बना है बड़ा होगा

वि० सूत्र फर्ज करो कि अ व स और द य फ ऐसे दो त्रिभुज हैं कि उनकी अ व और अ स दो भुज अलग २ बराबर हैं द य



और द फ दो भुजों के यानी अ व बराबर है द य के और



( ६८ )

**अ स** बराबर है **द फ** के लेकिन **ब स** आधार बड़ा है  
**य फ** आधार से

तो **ब अ स** कोन बड़ा होगा **य द फ** कोन से

उप० क्योंकि अगर **ब अ स** कोन **य द फ** कोन से बड़ा  
नहीं है तो **ब अ स** कोन या तो उसके बराबर है या उससे  
छोटा है

अगर **ब अ स** कोन **य द फ** कोन के बराबर है

तो **ब स** आधार भी **य फ** आधार के बराबर होना  
चाहिये

सा० ४

लेकिन **ब स** आधार **य फ** आधार के बराबर नहीं है (फ़र्क)

इसलिये **ब अ स** कोन **य द फ** कोन के बराबर नहीं है

अगर **ब अ स** कोन **य द फ** कोन से छोटा है

तो **ब स** आधार को भी **य फ** आधार से छोटा होना  
चाहिये

सा० २४

लेकिन **ब स** आधार **य फ** आधार से छोटा नहीं है (फ़र्क)

इसलिये **ब अ स** कोन **य द फ** कोन से छोटा नहीं है

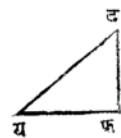
और यह साबित हो चुका है कि **ब अ स** कोन **य द फ** कोन  
के बराबर नहीं है

इसलिये **ब अ स** कोन **य द फ** कोन से बड़ा है

फ़लत इसलिये अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की  
दो भुजों के आद्योपांत—यही साबित करना था

टि० १ यह साथ ही इस तरह भी साबित  
होसکتی है

**अ स** पर **अ स ज** ऐसा त्रिभुज बनाओ कि उसकी ज अ, अ स और स ज  
भुज अलग २ **द य फ** त्रिभुज की **य द**,



( ७० )

द फ और फ य भुजों के बराबर हों ( सा० २१ ) और ज ब मिलाओ

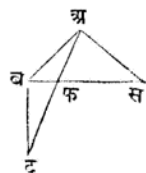
चूँकि ब स बड़ी है य फ से ( फर्ज ) यानी ज स से इसलिये ब ज स कोन बड़ा है ज ब स कोन से ( सा० १८ ) ज बिंदु पर ब ज ह कोन ज ब ह कोन के बराबर बनाओ ( सा० २३ ) और अ ह मिलाओ अब चूँकि अ ब ह और अ ज ह त्रिभुजों में अ ब बराबर है अ ज के और अ ह दोनों में उभयनिष्ठ है और ब ह आधार बराबर है ज ह आधार के ( सा० ६ ) इसलिये ब अ ह कोन बराबर है ज अ ह कोन के ( सा० ८ ) लेकिन ज अ ह कोन बड़ा है ज अ स कोन से यानी बड़ा है य द फ कोन से इसलिये ब अ ह कोन बड़ा है य द फ कोन से इसलिये ब अ स कोन और भी ज़्यादा बड़ा है य द फ कोन से

टि० २ इस साध्य के साबित करने का तीसरा तरीका यह है

द य फ त्रिभुज को अ ब स त्रिभुज पर इस तरह रखा कि य बिंदु ब बिंदु पर और य फ की दिशा ब स की दिशा पर हो और य द फ और ब अ स कोन आमने सामने हों तो चूँकि य फ छोटी है ब स से तो फ बिंदु ब स पर ब और स बिंदुओं के दर्मियान पड़ेगा- द अ मिलाओ इसको चार सूरतें हैं

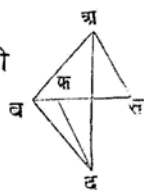
पहली सूरत यह है कि द अ आधार ब स को फ पर काटे

चूँकि ब अ द कोन और ब द अ कोन बराबर ह क्योंकि अ ब और ब द बराबर हैं और ब अ स कोन ब अ द कोन से बड़ा है इसलिये ब अ स कोन ब द फ यानी य द फ कोन से बड़ा है



दूसरी सूरत यह है कि द अ रेखा ब स आधार को फ और स के दर्मियान काटे

चूँकि ब द अ कोन ब द फ कोन से बड़ा है ( स्० ६ )



और ब द अ और ब अ द कोन बराबर हैं क्योंकि ब अ और ब द बराबर हैं इसलिये ब अ द कोन ब द फ कोन से बड़ा है इसलिये ब अ स कोन ब द फ यानी य द फ कोन से और भी ज़्यादा बड़ा है

तीसरी सूरत यह कि द अ आधार ब स को फ और ब के दर्मियान काटे द फ को ज तक बढ़ाया

( ७१ )

चूँकि द ज बड़ी है द फ से और द फ बराबर अ स के है

इसलिये द ज बड़ी है अ स से यानी अ ज से और भी ब ज़्यादा बड़ी है

इसलिये द अ ज कोन अ द ज कोन से बड़ा है (सा० १८)

और ब अ द और ब द अ कोन बराबर हैं क्योंकि ब द और अ ब बराबर हैं

इसलिये ब अ स कोन ब द फ यानी य द फ कोन से बड़ा है (ख० ४)

चौथी सूत्रत यह कि द अ आधार ब स को न काटे अ स को ज तक बढ़ाओ

चूँकि द ज छोटी है द फ से और द फ बराबर है

अ स के

इसलिये द ज छोटी है अ स से यानी अ ज से और भी ज़्यादा छोटी है

इसलिये ज अ द कोन ज द अ कोन से छोटा है

सा० १८

और ब अ द और ब द अ कोन बराबर हैं क्योंकि ब द और ब अ बराबर हैं

इसलिये ब अ स कोन ब द फ कोन से यानी य द फ कोन से बड़ा है (ख० ५)

टि० ३ यह साध्य चौबीसवीं साध्य का विलोम है और आठवीं साध्य के साथ वही इलाका रखती है जो चौबीसवीं साध्य चौथी साध्य के साथ रखती है इन चार साध्यों के आपस का इलाका तुमको इस तरह बयान करने से मालूम होगा

साध्य ४	अगर अ ब = द य	} तो ब स = य फ
	और अ स = द फ	
	और अ कोन = द कोन	
साध्य ८	अगर अ ब = द य	} तो अ कोन = द कोन
	और अ स = द फ	
	और ब स = य फ	

( ७२ )

साध्य २४	अगर अब = द य	} तो व स < य फ
	और अस = द फ	
	लेकिन अ कोन < द कोन	
साध्य २५	अगर अब = द य	} तो अ कोन < द कोन
	और अस = द फ	
	लेकिन व स < य फ	

इन चार साध्यों में से दो दो को मिलाकर इस तरह बयान करते हैं  
 “ अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग अलग बराबर हों तो एक त्रिभुज का आधार दूसरे त्रिभुज के आधार से बड़ा या छोटा होगा ( सा० २४ ) या उसके बराबर होगा ( सा० ४ ) जैसा कि पहले त्रिभुज के आधार के सामने का कोन बड़ा या छोटा है दूसरे त्रिभुज के आधार के सामने के कोन से या उसके बराबर है ” “ और अगर त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग अलग बराबर हों तो एक त्रिभुज की दो भुजों से बना हुआ कोन दूसरे त्रिभुज की भुजों से बने हुए कोन से बड़ा या छोटा होगा ( सा० २५ ) या उसके बराबर होगा ( सा० ८ ) जैसा कि पहले त्रिभुज का आधार बड़ा या छोटा है दूसरे त्रिभुज के आधार से या उसके बराबर है ”

### साध्य २६ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र अगर एक त्रिभुज के दो कोन दूसरे त्रिभुज के दो कोनों के अलग अलग बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुज दूसरे त्रिभुज की एक भुज के बराबर हो और यह बराबर भुज चाहे बराबर कोनों के दर्मियान की हों या उनके सामने की हों तो एक त्रिभुज की बाकी भुज अलग अलग दूसरे त्रिभुज की बाकी भुजों के बराबर होंगी और एक त्रिभुज का तीसरा कोन दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोन के बराबर होगा

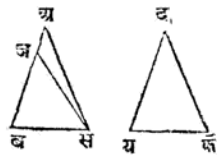
वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि अब स और द य फ ऐसे दो त्रिभुज हैं कि उनके कोन अब स और अस व अलग अलग

( ७३ )

बराबर हैं दय फ और द फ य कोनों के यानी अबस कोन बराबर है दय फ कोन के और अबस कोन बराबर है द फ य कोन के और एक एक भुज भी इन कोनों की आपस में बराबर हैं

पहले फ़र्ज़ करो कि बस और यफ भुज जो इन त्रिभुजों के बराबर कोनों के दर्मियान में हैं आपस में बराबर हैं

तो एक त्रिभुज की बाकी भुज अलग अलग बराबर होंगी दूसरे त्रिभुज की बाकी भुजों के यानी अब बराबर होगी दय के और अस बराबर होगी दफ के और बअस तीसरा कोन भी यदफ तीसरे कोन के बराबर होगा



उप० क्योंकि अगर अब भुज दय भुज के बराबर नहीं है तो एक इन दोनों में ज़रूर दूसरी से बड़ी है

अगर सुमकिन हो तो फ़र्ज़ करो कि अब बड़ी है दय से बज बराबर यद के बनाओ

सा० ३

और सज मिलाओ

अवा० १

चंकि जबस और दयफ दो त्रिभुजों में जब बराबर है दय के और बस बराबर है यफ के यानी जब और बस दो भुज अलग अलग बराबर हैं दय और यफ दो भुजों के और जबस कोन बराबर है दयफ कोन के

इसलिये जस आधार बराबर है दफ आधार के और जबस त्रिभुज बराबर है दयफ त्रिभुज के और एक त्रिभुज के बाकी कोन अलग अलग बराबर हैं दूसरे त्रिभुज के बाकी कोनों के यानी वह कोन आपस में बराबर है जिनके सामने की भुज बराबर हैं

सा० ४

( ७४ )

इसलिये **जसब** कोन बराबर है **दफय** कोन के  
 लेकिन **असब** कोन बराबर है **दफय** कोन के फ़र्ज़  
 इसलिये **जसब** कोन बराबर है **असब** कोन के स्व० १  
 यानी छोटा कोन बड़े कोन के बराबर है और यह बात ना-  
 सुमकिन है स्व० ८

इसलिये **अब** नाबराबर नहीं है **दय** के  
 यानी **अब** बराबर है **दय** के

**अब अस** और **दयफ** त्रिभुजों में चूँकि **अब** बरा-  
 बर है **दय** के और **वस** बराबर है **यफ** के और **अवस**  
 कोन बराबर है **दयफ** कोन के फ़र्ज़

इसलिये **अस** आधार बराबर है **दफ** आधार के और  
 तीसरा कोन **वअस** बराबर है तीसरे कोन **यदफ** के

दूसरी सूरत यह फ़र्ज़ करो कि भुज जो बराबर कोनों के सा-  
 मने हैं आपस में बराबर हैं यानी **अब** बराबर है **दय** के

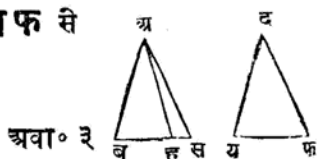
तो इस सूरत में भी एक त्रिभुज की बाक़ी भुज अलग अलग  
 दूसरे त्रिभुज की बाक़ी भुजों के बराबर होंगी यानी **वस** बरा-  
 बर **यफ** के और **अस** बराबर **दफ** के होगी और तीसरा  
 कोन **वअस** तीसरे कोन **यदफ** के बराबर होगा

**उप०** क्योंकि अगर **वस** बराबर **यफ** के नहीं है तो इन  
 दोनों में से एक ज़रूर दूसरी से बड़ी है

फ़र्ज़ करो कि **वस** बड़ी है **यफ** से

वह बराबर **यफ** के बनाओ

और **अह** मिलाओ





( ७५ )

चूँकि अवह और दयफ त्रिभुजों में अव बराबर है  
दय के और वह बराबर है यफ के और अवह कोन  
बराबर है दयफ कोन के

इसलिये अह आधार बराबर है दफ आधार के और  
अवह त्रिभुज बराबर है दयफ त्रिभुज के और एक त्रि-  
भुज के बाकी कोन अलग अलग बराबर हैं दूसरे त्रिभुज के बाकी  
कोनों के यानी वह कोन आपस में बराबर हैं जिनके सामने के  
भुज बराबर हैं सा० ४

इसलिये अहव कोन बराबर है दफय कोन के  
लेकिन दफय कोन बराबर है असव कोन के फ़र्ज  
इसलिये अहव कोन बराबर है असव कोन के स्व० १  
यानी अहस त्रिभुज का अहव बहिः कोन अपने सामने  
के असव अन्तः कोन के बराबर है और यह नासुमकिन है सा० १६  
इसलिये वस नाबराबर नहीं है यफ के

यानी वस बराबर है यफ के  
अव अवस और दयफ त्रिभुजों में चूँकि अव बराबर है  
दय के और वस बराबर है यफ के और अवस कोन बराबर  
है दयफ कोन के

इसलिये अस आधार बराबर है दफ आधार के और ती-  
सरा व अस कोन बराबर है तीसरे यदफ कोन के सा० ४

**फल** इसवास्ते अगर एक त्रिभुज के दो कोन दूसरे त्रिभुज के  
दो कोनों के आद्योन्त—यही साबित करना था

टि० १ इस साध को आचक्षादन क्रिया से इस तरह साबित कर सक्ते हैं  
(पहली सूरत) अगर दयफ त्रिभुज अवस त्रिभुज पर इस तरह  
रक्खा जाय कि य बिंदु व बिंदु पर हो और यफ भुज वस भुज पर

( ७६ )

तो चूँकि य फ बराबर ब स के है फ बिंदु स बिंदु पर पड़ेगा और चूँकि फ य द कोन स ब अ कोन के बराबर है इसलिये य द भुज ब अ पर पड़ेगी और इसलिये द बिंदु या तो ब अ पर पड़ेगा या उसकी सीध में पड़ेगा फिर चूँकि य फ द कोन बराबर है ब स अ कोन के इसलिये फ द भुज स अ पर पड़ेगी और इसलिये द बिंदु या तो स अ पर पड़ेगा या उसकी सीध में पड़ेगा लेकिन साबित हो चुका है कि द बिंदु या तो ब अ पर पड़ेगा या उसकी सीध में पड़ेगा इसलिये द बिंदु अ बिंदु पर जो ब अ और स अ दोनों में उभयनिष्ठ है पड़ेगा इसलिये य द और ब अ आपस में एक दूसरी को पूरा २ ढकलेंगी और इसलिये आपस में बराबर होंगी और फ द और स अ एक दूसरी को पूरा २ ढकलेंगी और इसलिये आपस में बराबर होंगी और य द फ और ब अ स कोन एक दूसरे को पूरा २ ढकलेंगे और इसलिये आपस में बराबर होंगे

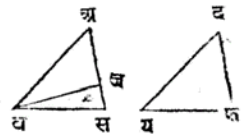
(दूसरी सूरत) अगर द य फ त्रिभुज अ ब स त्रिभुज पर इस तरह र-कखा जाय कि द बिंदु अ बिंदु पर और द य भुज अ ब भुज पर हो तो चूँकि द य बराबर अ ब के है इसलिये य बिंदु ब बिंदु पर पड़ेगा और चूँकि कोन द य फ बराबर है कोन अ ब स के इसलिये भुज य फ भुज ब स पर पड़ेगी और बिंदु फ भी बिंदु स पर पड़ेगा क्योंकि अगर भुज य फ भुज ब स पर हो लेकिन फ बिंदु स बिंदु पर न पड़े तो फर्ज करो कि फ बिंदु ह बिंदु की जगह पर ब और स के दर्मियान पड़ता है अ ह मिलाओ (अवा० १) चूँकि अ ह ब कोन बराबर है द फ य कोन के और द फ य कोन बराबर है अ स ब कोन के इसलिये अ ह ब कोन बराबर है अ स ब कोन के यानी बहिःकोन अपने सामने के अन्तः-कोन के बराबर है और यह नासुमकिन है (सा० १६) इसलिये फ बिंदु ह बिंदु पर यानी ब और स के दर्मियान नहीं पड़ता है इसी तरह यह भी साबित होसक्ता है कि फ बिंदु ब स भुज के बड़े हुए हिस्से पर भी नहीं पड़ सक्ता है इसलिये फ ठीक स पर पड़ेगा और इसलिये ब स बराबर है य फ के इसलिये अ स आधार बराबर है द फ आधार के और ब अ स कोन य द फ कोन के बराबर है

टि० २ चौथी साध्य के तीसरे टिप्पन में बयान हुआ है कि हर त्रिभुज में छः राशि होती हैं और अगर इन छः राशियों में से कोई तीन दी हुई हों तो सिवाय पहली और चौथी सूरत के और सूरतों में बाकी तीन रा-

( ७७ )

श्री दर्शाफ्त होसत्ती है और त्रिभुज मालूम होसत्ता है चौथी सूरत में अगर एक खास शर्त लगादी जावे तो दो त्रिभुज जिनमें से एक त्रिभुज की दो भुज बराबरबर हों दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के और उन भुजों में से दो बराबर भुजों के सामने के कोन बराबर हों आपस में बराबर होंगे इस कौद के साथ उस सूरत को इस तरह बयान करते हैं “अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग २ बराबर हों और उन भुजों में से दो बराबर भुजों के सामने के कोन आपस में बराबर हों और यह शर्त भी हो कि दूसरी दो बराबर भुजों के सामने के कोन दोनों अधिक कोन हों या न्यूनकोन हों या उनमें से एक समकोन हो तो एक त्रिभुज की तीसरी भुज दूसरे त्रिभुज की तीसरी भुज के बराबर होगी और एक त्रिभुज के बाकी कोन अलग २ दूसरे त्रिभुज के बाकी कोनों के बराबर होंगे” उक्त दस ने इस सूरत को छोड़ दिया है वह इस तरह साबित होसत्ती है

फ़र्ज करो कि अ ब स और द य फ त्रिभुजों में अब बराबर है द य के और ब स बराबर है य फ के और ब अ स और द फ कोन जो दो ब स और य फ बराबर भुजों के सामने हैं आपस में बराबर हैं और अ स ब और द फ य कोन जो दूसरी दो अ ब और द य बराबर भुजों के सामने हैं या तो दोनों अधिक कोन हैं या न्यूनकोन हैं या उनमें से एक समकोन है



तो अ स बराबर द फ के होगी और अ ब स कोन द य फ कोन के और अ स ब कोन द फ य कोन के बराबर होगा

अगर अस बराबर द फ के नहो तो अ ज बराबर द फ के बनावो और ब ज मिलावो

चूँकि अ ब ज और द य फ त्रिभुजों में ब अ बराबर है द य के और अ ज बराबर द फ के है और ब अ ज कोन द य फ कोन के बराबर है इसलिये ब ज बराबर है य फ के और अ ज ब कोन बराबर है द फ य कोन के ( सा० ४ ) लेकिन ब स बराबर है य फ के ( फ़र्ज ) इसलिये ब ज बराबर है ब स के ( स्व० १ ) इसलिये ब स ज कोन बराबर है ब ज स कोन के ( सा० ५ ) पछछे फ़र्ज करो कि अ स ब और द फ य दोनों न्यून कोन हैं तो अ ज ब कोन भी न्यूनकोन है और इसलिये ब ज स अधिक कोन है ( सा० १३ ) इसलिये ब स ज कोन भी अधिक कोन है और यह हमारे फ़र्ज के खिलाफ़ है

(दूसरी सूरत) फ़र्ज करो कि अ स ब और द फ य दोनों अधिककोन

( ७८ )

हैं तो अ ज ब कोन जो द फ य कोन के बराबर साधित हो चुका है अधिक कोन है और इसलिये ब ज स न्यून कोन है (सा० १३) और इसलिये ब स ज कोन भी न्यून कोन है और यह हमारे फर्ज के खिलाफ है (तीसरी सूरत) फर्ज करो कि अ स ब और द फ य कोनों में से कोई एक समकोन है

अगर अ स ब समकोन है तो ब ज स भी समकोन है इसलिये ब स ज और ब ज स कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं और यह नामुमकिन है (सा० १७)

अगर द फ य समकोन है तो अ ज ब भी समकोन है और इसलिये ब ज स भी समकोन है और इसलिये ब स ज भी समकोन है इसलिये ब स ज और ब ज स कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं और यह नामुमकिन है

सा० १७

इसलिये अ स नाबराबर द फ के नहीं है यानी अस बराबर द फ के है इसलिये अ ब स त्रिभुज बराबर है द य फ त्रिभुज के और एक त्रिभुज के बाकी कोन अलम २ दूसरे त्रिभुज के बाकी कोनों के बराबर है यानी अ ब स कोन द य फ कोन के और अ स ब कोन द फ य कोन के बराबर है

सा० ४

## अभ्यास

( ५५ ) त्रिभुज की किसी दो भुज से बने हुए कोन के एक रेखा दो बराबर हिस्से करती है अगर उस रेखा के किसी बिन्दु से उन भुजों पर लम्ब गिरावे तो वह आपस में बराबर होंगे

( ५६ ) तीन सीधी रेखा दी हुई हैं उनमें से किसी एक में ऐसा बिन्दु दर्शाओ कि उससे जो बाकी रेखाओं पर लम्ब गिराये जायें आपस में बराबर हों और यह भी बताओ कि किस हालत में यह साध्य नामुमकिन है

( ५७ ) तीन दिये हुए बिन्दु हैं एक ऐसी सीधी रेखा खींचो कि वह उन बिन्दुओं में से किसी एक में होकर गुजरे और उस पर बाकी दो बिन्दुओं से जो लम्ब गिराये जायें आपस में बराबर हों और यह भी बताओ कि किस हालत में यह साध्य नामुमकिन है

( ५८ ) अ ब स त्रिभुज के अ कोन के एक रेखा दो बराबर हिस्से करती है ब से ब द लम्ब उस रेखा पर गिराया गया है और ब द बढ़कर अ स से या अ स के बढ़े हुए हिस्से से य बिन्दु पर मिलती है तो साबित करो कि ब द बराबर है द य के

( ७६ )

( ५९ ) अ व और अ स कोई दो सीधी रेखा अ बिन्दु पर मिलती है किसी द बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा उन दोनों रेखाओं से य और फ बिन्दुओं पर मिलती हुई खींचो कि अ य बराबर हो अ फ के

( ६० ) दो समकोण त्रिभुज ऐसे हैं कि जिनके कर्ण आपस में बराबर हैं और एक त्रिभुज की एक भुज दूसरे त्रिभुज की एक भुज के बराबर है तो साबित करो कि दोनों त्रिभुज सब तरफ आपस में बराबर हैं

### सवालात इम्तिहान साध्य १६ से २६ तक

( १ ) सोलहवीं साध्य के साबित करने में यही दस ने कौनसी खयमिद्दि को मान लिया है

( २ ) ऋजुभुज क्षेत्र के वहिः कोन और अन्तः कोन की तारीफ़ करो

( ३ ) रेखागणित की सत्रहवीं साध्य का विलोम बयान करो

( ४ ) १८ वीं और १९ वीं साध्य का कल्पितार्थ और फल बताओ

( ५ ) कौनसी प्रकल से यह नतीजा निकाल सक्ते हैं कि दो बिन्दुओं के बीच की सीधी रेखा सब से छोटी दूरी है ( जवाब ) साध्य २० से

क्योंकि अ बिन्दु व स रेखा से कैसा ही नज़दीक क्यों नहो व स हमेशा व अ और अ स से छोटा ही होता है

( ६ ) क्या २१ वीं साध्य में यह प्रश्न ज़रूर है कि त्रिभुज के आधार का सिरो से सीधी रेखा खींची जाय

( ७ ) २२ वीं साध्य के दावे में तीन सीधी रेखाओं में से हर एक दो का मिलकर तीसरी से बड़ा होना क्यों ज़रूरी है साबित करो कि इस प्रश्न के पूरा होने से दोनों वृत्त ज़रूर एक दूसरे को काटते हैं

( ८ ) किन किन हालातों में २२ वीं साध्य के बनाने में वृत्त एक दूसरे को न काटेंगे

( ९ ) २२ वीं साध्य के दावे में अगर दो रेखाओं का जोड़ तीसरी रेखा के बराबर होता तो क्या वृत्त मिल जाते तो साबित करो कि वे एक दूसरे को न काटते

( १० ) “ ऐसी तीन सीधी रेखाओं से एक त्रिभुज बनाओ कि जिनमें से हर एक दो मिलकर तीसरे से बड़ा है ” क्या कौनों के लिये भी ऐसी प्रश्न ज़रूरी है

( ११ ) क्या ऐसा त्रिभुज बना सक्ते हैं जिसके भुजों की लम्बाई का सम्बन्ध १, २, ३ है या जिसके भुजों की लम्बाई का सम्बन्ध १, २, ३ है

( १२ ) क्या ऐसा त्रिभुज बना सक्ते हैं जिसके कोनों का सम्बन्ध १, २, ३ है अपने जवाब के सही या ग़लत होने का सबूत दो

( १३ ) चौबीसवीं साध्य के अमल में इस प्रश्न की कि द य भुज द फ



( ८० )

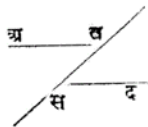
भुज से बड़ी नहीं है क्यों जरूरत है

( १४ ) “ अगर दो त्रिभुजों में से एक त्रिभुज की कोई तीन भिक्दारों दूसरे त्रिभुज की उन्ही तीन भिक्दारों के अलग अलग बराबर हों तो त्रि-भुज हर सूरत में आपस में बराबर होंगे ” क्या यह शकल हर सूरत में सही है इन सब सूरतों का बयान करो कि जिनमें त्रिभुजों की बराबरी की उक्तैदस ने पहले अध्याय में जिक्र किया है कौनसी सूरत उक्तैदस ने नहीं बयान की है ( जवाब ) टिप्पणी नम्बर २ साध्या २६ देखो

( १५ ) २६ वीं साध्या की दूसरी सूरत का विलोम बयान करो कौनसी हालतों में वह सही है इसकी साबित करो

परिभाषा एकान्तर कोन उन कोनों को कहते हैं

जो दो सीधी रेखा किसी तीसरी सीधी रेखा से उस के दो बिन्दुओं पर मिलकर उस पर दो कोन आमने सामने की तरफों में बनाती है जैसे इस तस्वीर में कोन अ ब स और ब स द एकान्तर कोन हैं



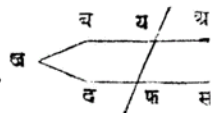
## साध्य २७ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र अगर एक सीधी रेखा किसी और दो सीधी रेखाओं पर गिर कर एकान्तर कोन एक दूसरे के बराबर बनावें तो वह दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी

वि० सूत्र फ़र्ज करो कि य फ़ सीधी रेखा अ व और स द दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अयफ और यफ़द एकान्तर कोन एक दूसरे के बराबर बनाती है

तो अ व समानान्तर होगी स द के

उप० अगर अ व समानान्तर स द के नहीं



तो अ व और स द बढ़कर किसी तरफ़ चाहे व और द की तरफ़ या अ और स की तरफ़ कहीं मिल जायंगी

अगर मुमकिन ही तो फ़र्ज करो कि अ व और स द बढ़ कर व और द की तरफ़ ज बिन्दु पर मिल जायंगी



( ८१ )

तो ज य फ एक त्रिभुज है

चूँकि ज य फ त्रिभुज की ज य एक भुज अ बिन्दु तक बढ़ी है

इसलिये बहिःकोन अ य फ अपने सामने के अन्तःकोन

य फ ज से बड़ा है

सा० १६

लेकिन अ य फ कोन य फ ज कोन के बराबर है (फ़र्ज़)

इसलिये अ य फ कोन बड़ा है य फ ज कोन से और उसके बराबर भी है और यह नासुमकिन है

इसलिये अ व और स द बढ़कर व और द की तरफ़ नहीं मिल सकतीं

और इसी तरह यह भी साबित होसक्ता है कि अ व और स द बढ़कर अ और स की तरफ़ नहीं मिल सकती हैं

लेकिन वह सीधी रेखा जो एक घरातल में हों और दोनों तरफ़ कितनी ही दूर तक बढ़ने से कहीं न मिलें एक दूसरी की समानान्तर होती हैं

इसलिये अ व समानान्तर है स द की

**फल-** इसलिये अगर एक सीधी रेखा किसी और दो सीधी रेखाओं पर आद्योपान्त—यही साबित करना था

टि० इस साध्यकी तस्वीरमें बहस करने की गरज से य व ज और फ द ज टैप्टी रेखाओं को सीधी रेखा और य फ द ज व को त्रिभुज खयाल करना चाहिये

### अभ्यास

( ६१ ) अगर य ज ह फ सीधी रेखा अ व और स द दो सीधी रेखाओं को जो एकही घरातल में हैं ज और ह बिन्दुओं पर काटे और अ ज य और फ ह द कोन बराबर द्वावे तो अ व और स द समानान्तर होंगी

( ६२ ) अगर य ज ह फ सीधी रेखा अ व और स द दो सीधी रेखाओं को जो एकही घरातल में हैं ज और ह बिन्दुओं पर काटे और य ज व और द ह फ कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हों तो अ व और स द समानान्तर होंगी

( ८२ )

( ६३ ) जो रेखा किसी और रेखाओं के साथ समकोन बनाती है तो वह रेखा आपस में समानान्तर होंगी

( ६४ ) हर समदिवाह त्रिभुज के शीर्ष बहिःकोन के दो बराबर हिस्से करने वाली रेखा आधार के समानान्तर होती है

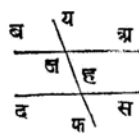
### साध्य २८ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** अगर एक सीधी रेखा किसी और दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपनी एक तरफ में बहिःकोन और उसके सामने का अन्तःकोन बराबर बनावे या अपनी एक तरफ दो अन्तःकोन समकोन के बराबर बनावे तो वह दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी

**वि० सूत्र** फर्ज करो कि **य फ** सीधी रेखा **अ व** और **स द** दो सीधी रेखाओं पर गिरकर **य ज व** बहिःकोन उसके सामने के **ज ह द** अन्तःकोन के बराबर अपनी एक तरफ में बनाती है या अपनी एक तरफ के **ब ज ह** और **ज ह द** अन्तःकोन दो समकोन के बराबर बनाती है

तो **अ व** समानान्तर होगी **स द** की

**उप०** चूंकि **य ज व** कोन **ज ह द** कोन के बराबर है



और **य ज व** कोन **ज ह द** कोन के बराबर है सा० १५

इसलिये **अ ज ह** कोन **ज ह द** कोन बराबर है स्व० १

और यह एकान्तर कोन हैं

इसलिये **अ व** समानान्तर है **स द** की

सा० २७

फिर चूंकि **ब ज ह** और **ज ह द** कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं

फर्ज

और **अ ज ह** और **ब ज ह** कोन भी मिलकर दो समकोन के बराबर हैं

सा० १३

( ८३ )

इसलिये **अ ज ह** और **व ज ह** कोन मिलकर **ज ह द**  
और **व ज ह** कोनों के बराबर हैं स्व० १

इन बराबरों में से **व ज ह** कोन जो दोनों में उभयनिष्ठ है  
निकाल डाला

इसलिये बाकी **अ ज ह** कोन बराबर है बाकी **ज ह द**  
कोन के स्व० ३  
और यह एकान्तर कोन हैं

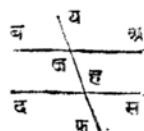
इसलिये **अ व** समानान्तर है **स द** की सा० २७  
फल इसलिये अगर एक सीधी रेखा किसी दो सीधी रेखाओं  
पर गिरकर आद्योपान्त—यही साबित करना था  
टि० इस साध्य में दो साध्य शामिल हैं

### साध्य २८ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र अगर एक सीधी रेखा दो सीधी समानान्तर  
रेखाओं पर गिरे तो एकान्तर कोन आपस में बराबर और उस  
की एक तरफ़ में बहिः कोन और उसके सामने का अन्तः कोन  
आपस में बराबर और उसकी एक तरफ़ में दो अन्तः कोन मिल-  
कर दो समकोन के बराबर पैदा होंगे

वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि **य फ** सीधी रेखा **अ व** और  
**स द** दो समानान्तर सीधी रेखाओं पर गिरती है

तो **अ ज ह** और **ज ह द** एकान्तर कोन आपस में बराबर होंगे और **य फ** के एक तरफ़



में **व ज व** बहिः कोन और उसके सामने का **ज ह द** अन्तः  
कोन आपस में बराबर होंगे और **व ज ह** और **ज ह द** दो  
अन्तः कोन मिलकर दो समकोन के बराबर होंगे

उप० क्योंकि अगर **अ ज ह** कोन **ज ह द** कोन के बराबर

( ८४ )

नही तो उनमें से एक जुखर दूसरे से बड़ा होगा

अगर मुमकिन हो तो फ़र्ज़ करो कि **अ ज ह** कोन बड़ा है

चूँकि **अ ज ह** कोन बड़ा है **ज ह द** कोन से

और इन दोनों नाबराबरों में से हर एक में **ब ज ह** कोन मिलाया

इसलिये **अ ज ह** और **ब ज ह** कोन मिलकर बड़े हैं

**ब ज ह** और **ज ह द** कोनों से

लेकिन **अ ज ह** और **ब ज ह** कोन मिलकर दो समको-  
न के बराबर हैं सा० १३

इसलिये **ब ज ह** और **ज ह द** कोन मिलकर दो सम-  
कोन से कम हैं

लेकिन अगर दो सीधी रेखाओं पर एक सीधी रेखा के गिरने  
से उसकी एक तरफ़ में दो अन्तःकोन ऐसे बनें कि वह दोनों मिल  
कर दो समकोन से कम हों तो वह दोनों सीधी रेखा लगातार  
बढ़ायी जाने से कहीं न कहीं उस तरफ़ में जिधर वह कोन हैं जो  
मिलकर दो समकोन से कम हैं मिल जायगी स्व० १२

इसलिये **अ ब** और **स द** लगातार बढ़ायी जाने से मिल  
जायगी

लेकिन यह कभी नहीं मिलसक्ती हैं क्योंकि यह समानान्तर  
हैं फ़र्ज़

इसलिये **अ ज ह** कोन **ज ह द** कोन के नाबराबर  
नहीं है यानी उसके बराबर है

चूँकि **अ ज ह** कोन **य ज ब** कोन के बराबर  
है सा० १५

इसलिये **य ज ब** कोन **ज ह द** कोन के बराबर है स्व० १

इन दोनों बराबरों में **ब ज ह** कोन मिलाया

इसलिये **य ज अ** और **ब ज ह** कोन मिलकर बराबर

( ८५ )

बराबर हैं व ज ह और ज ह द कोनों के स्व० २

लेकिन य ज व और व ज ह कोन मिलकर दो सम-  
कोन के बराबर हैं सा० १३

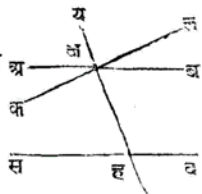
इसलिये व ज ह और ज ह द कोन मिलकर दो समकोन  
के बराबर हैं स्व० १

**फल** इसलिये अगर एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रे-  
खाओं पर गिरे तो कोने आयोपान्त—यही साबित करना था

टि० १ बारहवीं स्वयंसिद्ध पहली ही बार इस साध्य में इस्तेमाल की  
गयी है

टि० २ इस साध्य को प्रिखेपर साहब ने बगैर बारहवीं स्वयंसिद्ध की  
सद के इस तरह साबित किया है

अगर अ ज ह कोन ज ह द कोन के बराबर  
नहो तो इनमें से एक बड़ा होगा दूसरे से अगर समकोन  
हो तो फर्ज करो कि अ ज ह कोन ज ह द कोन से  
बड़ा है ह ज के ज बिंदु पर और उसके उस तरफ में  
जिधर अ ज ह कोन है ह ज क कोन ज ह द कोन  
के बराबर बनाओ और क ज को ल तक बढ़ाओ



चूंकि क ज ह और ज ह द एकान्तर कोन आपस में बराबर हैं इस-  
लिये क ल समानान्तर है सद की ( सा० २७ ) लेकिन अ व भी सद की  
समानान्तर है ( फर्ज ) इसलिये अ व और क ल जो एकही ज बिंदु में  
होकर गुजरती हैं दोनों समानान्तर हैं सद की और यह नासमकोन है  
( बारहवीं स्वयंसिद्ध का टिप्पण देखो ) इसलिये अ ज ह और ज ह द  
एकान्तर कोन आपस में नाबराबर नहीं हैं यानी आपस में बराबर हैं

चूंकि य ज व कोन अ ज ह कोन के बराबर है ( सा० १५ ) और  
अ ज ह कोन ज ह द कोन के बराबर साबित हो चुका है इसलिये य ज व  
बहिःकोन बराबर है ज ह द अन्तःकोन के ( स्व० १ )

चूंकि य ज व कोन ज ह द कोन के बराबर है और इन दोनों बराबरों  
में से हर एक में व ज ह कोन मिलाओ इसलिये य ज व और व ज ह  
कोन मिलकर व ज ह और ज ह द कोन के बराबर हैं ( स्व० २ ) लेकिन  
य ज व और व ज ह कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं ( सा० १३ )  
इसलिये व ज ह और ज ह द अन्तःकोन भी मिलकर दो समकोन के  
बराबर हैं ( स्व० १ )

( ८६ )

टि० ३ इस साध्य में तीन मुखतलिफ् साध्यों शामिल हैं उनमें से पहली साध्य सत्ताईसवीं साध्य का विलोम है और दूसरी और तीसरी साध्यअष्टाईसवीं साध्य के पहले और दूसरे हिस्सों का विलोम है

### अभ्यास

( ६५ ) जो रेखा समदिवाहु त्रिभुज के आधार की समानान्तर होगी वह भुजों के साथ बराबर कोन बनावेगी

( ६६ ) अ और व दो रेखा अलग २ स और द दो रेखाओं की समानान्तर हैं यानी अ समानान्तर स की और व समानान्तर द की हो तो साबित करो कि जो भुजाव अ का द के साथ है बराबर होगा उस भुजाव के जो व का स के साथ है

( ६७ ) अगर एक त्रिभुज के भुज दूसरे त्रिभुज के भुजों के अलग २ समानान्तर हैं तो एक त्रिभुज के कोने दूसरे त्रिभुज के कोनों के बराबर बराबर होंगे

( ६८ ) अगर दो कोन आपस में बराबर हों और उनकी एक २ भुज आपस में समानान्तर हों तो एक कोन की दूसरी भुज दूसरे कोन की दूसरी भुज के समानान्तर होगी

( ६९ ) अगर अ स द और व स द व्यास कोनों के स य और स फ रेखा दो दो बराबर हिस्से करें और य फ रेखा जो अ व रेखा की समानान्तर खींची जाय और स द को ज बिंदु पर काटे तो साबित करो कि य ज बराबर है ज फ के

( ७० ) एक सीधी रेखा के सिरे दो समानान्तर सीधी रेखाओं पर हैं उन रेखा के बीचों बीच के बिंदु से एक ऐसी सीधी रेखा खींची गयी है कि उसके सिरे उन दो समानान्तर रेखाओं पर पड़ते हैं तो साबित करो कि उस सीधी रेखा के भी उस बिंदु पर दो बराबर हिस्से होते हैं

( ७१ ) अगर किसी बिंदु से जो दो समानान्तर रेखाओं से बराबर दूरी पर है दो रेखा उन समानान्तर रेखाओं को काटती हुई खींची जाय तो समानान्तर रेखाओं के हिस्से जो उन रेखाओं के दमियान होंगे आपस में बराबर होंगे

( ७२ ) अगर सीधी रेखा जो एक त्रिभुज के शीर्ष बहिःकोन के दो बराबर हिस्से करती है उस त्रिभुज के आधार के समानान्तर भी है तो साबित करो कि वह त्रिभुज समदिवाहु है

( ७३ ) अ व स त्रिभुज के व अ स कोन के अ द रेखा दो बराबर हिस्से करती है और व स से द बिंदु पर मिलती है द य और द फ समानान्तर हैं अ स और अ व की और स व और अ स से य और फ बिंदु पर मिलती हैं साबित करो कि द य और द फ आपस में बराबर हैं



( ८७ )

( ७४ ) अ व स त्रिभुज की व स भुज द बिंदु तक बढ़ायी गयी है और स य रेखा अ स व कोन के और स ज रेखा अ स द कोन के दो२ बराबर हिस्से करती है य स रेखा अ व भुज से य बिंदु पर मिलती है और य ज समानांतर है व स की और अ स को फ बिंदु पर काटती है साबित करो कि य फ और फ ज आपस में बराबर हैं

( ७५ ) उस समानांतर चतुर्भुज के भुजों का जोड़ जो किसी समत्रिबाहु त्रिभुज के एक भुज के किसी बिंदु से बाकी दो भुजों के समानान्तर रेखा खींचने से बनता है उस त्रिभुज के भुज से दूना होता है

### साध्य ३० प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र जो सीधी रेखा किसी एकही सीधी रेखा की समानांतर होती है वह आपस में भी समानांतर होती है

वि० सूत्र फर्ज करो कि अ व और स द में से हर एक य फ की समानांतर है

तो अ व समानांतर होगी स द की

अ०- जह क ऐसी सीधी रेखा फर्ज करो



कि वह अ व, य फ और स द को काटे

उप० चूंकि जह क दो समानांतर सीधी रेखाओं अ व

और य फ को ज और ह बिन्दुओं पर काटती है

इसलिये अ ज ह और ज ह फ एकांतर कोन बराबर हैं (सा० २८)

और चूंकि जह क रेखा य फ और स द दो सीधी समानांतर रेखाओं को ह और क बिन्दुओं पर काटती है

इसलिये ज ह फ बहिः कोन ह क द अन्तः कोन के बराबर है (सा० २९)

और यह साबित हो चुका है कि अ ज क कोन ज ह फ कोन के बराबर है

इसलिये अ ज क कोन ज क द कोन के बराबर है स्व० १

और यह एकांतर कोन हैं

( ८८ )

**इसलिये अब समानांतर है स द की**

**फल** इसलिये जो सीधी रेखा किसी एकही सीधी रेखा की आधोपांत—यही साबित करना था

टि० इस साध्य में अगर अब और य फ में से हर एक स द की समानांतर हो तो इसी तरह साबित हो सक्ता है कि अब और य फ आपस में समानान्तर होंगी— उक्तैदस ने जो सूत्र साबित की है वह ऐसी साफ़ ज़ाहिर है कि सूत्र की सहीताज नहीं है क्योंकि जब अब और स द रेखा य फ रेखा से जो उनके दर्मियान में है नहीं मिलती तो आपस में भी कहीं न मिलेंगी और इसलिये समानान्तर होंगी

### अभ्यास

( ७६ ) तीसवीं साध्य के विलोम को बयान करो और साबित करो

### साध्य ३१ वस्तूपपाद्य

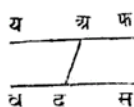
**सा० सूत्र** दिये हुए बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो कि वह दो हुई सीधी रेखा के समानांतर हो

**वि० सूत्र** फर्ज करो कि अ दिया हुआ बिन्दु और व स दो हुई सीधी रेखा है

अ से एक ऐसी सीधी रेखा खींचनी है कि वह व स की समानांतर हो

**अ०- व स में कोई द बिन्दु लो और अ द मिलाओ**

**अ द** सीधी रेखा के **अ** बिन्दु पर **द अ य** कोन **अ द स** कोन की बराबर और **अ द** की सामने की तरफ में बनाओ



सा० २३

और **अ य** को **फ** तक बढ़ाओ

तो **य फ** समानांतर होगी **व स** की

**उप०** चूंकि **अ द** सीधी रेखा **य फ** और **व स** दो सीधी रेखाओं से मिलती और उनके साथ **य अ द** और **अ द स**

( ८८ )

एकान्तर कोन एक दूसरे के बराबर बनाती है

इसलिये **य व स** समानांतर होगी **व स** की सा० २७

**फल** इसलिये दिये हुए **अ** बिन्दु से **य अ व स** सीधी रेखा

दी हुई **व स** सीधी रेखा की समानांतर खिंच गयी

और इसी रेखा के खींचने की ज़रूरत थी

टि० १ इस साध्य के अंकन में यह इबास्त “ **अ द** के सामने की तरफ़ में होनी ज़रूर है क्योंकि अगर **य अ द** कोन **अ द** रेखा की उसी तरफ़ में बनाया जाय जिधर **अ द स** कोन है तो साध्य का हल होना नामुमकिन होगा

टि० २ इस साध्य के बनाने में तेईसवीं साध्य की कुछ ज़रूरत न पड़ेगी अगर ग्यारहवीं और बारहवीं साध्यों की मदद ली जाय

## अभ्यास

( ७७ ) किसी त्रिभुज के आधार पर के कोने और उस लम्ब की लम्बाई जो आधार पर उसके सामने के कोने से डाला जाता है मालूम है उस त्रिभुज को बनाओ

( ७८ ) दी हुई **स द** रेखा में एक ऐसा बिन्दु **व** दर्याफ़्त करो कि अगर उस बिन्दु से एक दिये हुए बिन्दु **अ** तक सीधी रेखा खींची जाय तो कोन **अ व स** एक दिये हुए कोन के बराबर हो

( ७९ ) **अ व स** समकोन त्रिभुज के **अ व** कर्ण में **द** बिन्दु ऐसा दर्याफ़्त करो कि **व द** बराबर हो उस लम्ब के जो **द** से **अ स** पर गिराया जावे

( ८० ) **अ व स** एक समद्विबाहु त्रिभुज है उसकी **अ व** और **अ स** बराबर भुजों में **द** और **य** ऐसे बिन्दु दर्याफ़्त करो कि **व द**, **द य** और **य स** आपस में बराबर हों

( ८१ ) समद्विबाहु त्रिभुज के **व स** आधार के साथ समकोन बनाने वाली रेखा **अ व** भुज को **द** बिन्दु पर और **स अ** के पड़े हुए हिस्से को **य** बिन्दु पर काटती है तो साबित करो कि **अ य द** समद्विबाहु त्रिभुज है

( ८२ ) उन त्रिभुजों में जिनका एकही शीर्ष कोन है और जिनके आधार एकही बिन्दु में होकर गुजरते हैं वह त्रिभुज सबसे छोटा होगा जिसके आधार के उस बिन्दु पर दो बराबर हिस्से होते हैं

( ८३ ) **अ व स** एक त्रिभुज है उसके **व स** आधार के समानान्तर एक **द य** रेखा ऐसी खींची कि इसके **द** और **य** सिरे त्रिभुज के **अ व** और **अ स** भुजों पर हों और वह बराबर हो (१) **व द** या **स य** के (२) **व द** और **स य** के योग के (३) **व द** और **स य** के अन्तर के

८० )

( ८३ ) दो दिये हुए बिंदुओं से जो दो दी हुई समानान्तर रेखाओं में हैं ऐसी दो रेखा खींचो जो दी हुई समानान्तर रेखाओं के साथ एक विषमकोन समचतुर्भुज बनावे

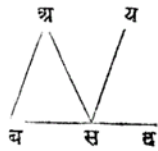
( ८५ ) अब और सद दो दी हुई रेखा हैं उनके हमियान एक ऐसी रेखा दी हुई बम्बार्द की खींचो जो किसी तीसरी दी हुई य फा रेखा की समानान्तर हो

### साध्य ३२ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र अगर किसी त्रिभुजकी एक भुज बढ़ाई जाय तो बहिः कोन अपने सामने के दो अन्तः कोनों के बराबर होगा और तीनों अन्तः कोन मिलकर दो समकोन के बराबर होंगे

वि० सूत्र फर्ज करो कि अब स एक त्रिभुज

है उसकी व स भुज द बिन्दु तक बढ़ाई गयी है



तो अब स द बहिःकोन अपने सामने के अब स और व अब स दो अन्तःकोनों के बराबर होगा और त्रिभुज के अब स, व अब स और अब स व तीनों अन्तःकोन मिलकर दो समकोन के बराबर होंगे

अ० स बिन्दु से स य रेखा व अब की समानांतर खींचो (सा० ३१)

उप० चूंकि अब समानांतर स य की है और अब स उन पर गिरती है

इसलिये अब स य और व अब स एकान्तर कोन आपस में बराबर हैं

सा० २८

फिर चूंकि अब समानांतर स य की है और व द उन पर गिरती है

इसलिये स य द बहिःकोन अपने सामने के अब स अन्तः कोन के बराबर है

सा० २८

लेकिन अब स य कोन व अब स कोन के बराबर साबित हो चुका है

( ८१ )

इसलिये कुल अक्षद बहिःकोन अपने सामने के वक्षस  
और अवस दो अन्तःकोनों के बराबर है स्व० २

इन बराबरों में से हर एक में अक्षव कोन मिलाओ  
इसलिये अक्षद और अक्षव कोन मिलकर सवक्ष,  
वक्षस और अक्षव तीनों कोनों के बराबर हैं स्व० २

लेकिन अक्षद और अक्षव कोन मिलकर दो समकोन  
के बराबर हैं सा० १३

इसलिये सवक्ष, वक्षस और अक्षव तीनों कोन मि-  
लकर दो समकोन के बराबर हैं स्व० १

फल इसलिये अगर किसी त्रिभुज की एक भुज-आद्योपान्त यही  
सावित करना था

टि० इस साध्य में दो साध्य शामिल हैं इस साध्य का दूसरा हिस्सा  
यानी त्रिभुज के तीनों कोन मिलकर दो समकोन के बराबर होते हैं वगैर  
बढ़ाये त्रिभुज की किसी भुज के इस तरह सावित होसके हैं

अ बिंदु से द अ य समानान्तर व स की खींचो (सा० २१) द अ य

चूँकि द अ और व स आपस में समानान्तर हैं और अ व  
उन पर गिरती है इसलिये अ व स कोन बराबर है व अ द  
एकान्तर कोन के (सा० २६) और चूँकि य अ और स व  
आपस में समानान्तर हैं और अ स उन पर गिरती है तो व स अ कोन  
बराबर है स अ य एकान्तर कोन के (सा० २६) लेकिन अ व स कोन  
द अ व कोन के बराबर सावित हो चुका है इसलिये अ व स और व स अ  
कोन मिलकर बराबर हैं द अ व और स अ य कोनों के (स्व० २) इन  
बराबरों में से हर एक में व अ स कोन मिलाया इसलिये अ व स, व स अ  
और स अ व कोन मिलकर बराबर हैं द अ व, व अ स और स अ य  
कोनों के (स्व० २) लेकिन द अ व और व अ स और स अ य कोन मि-  
लकर दो समकोन के बराबर हैं (सा० १३) इसलिये अ व स, व स अ  
और स अ व कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं (स्व० २)

अनु० हर ऋजुभुज क्षेत्र के सब अंतःकोन और चार समकोन

( ८२ )

मिलकर बराबर हैं उतने समकोनों के जो गिनती में क्षेत्र की भुजों की तादाद से दूने हों

उप० अगर किसी अबसदय ऋजुभुज क्षेत्र



के अन्दर कोई फ बिंदु लिया जाय और उस बिंदु से सब कोनों तक सीधी रेखा खींची जाय तो जाहिर है कि वह क्षेत्र उतने त्रिभुजों में बट जायगा जितनी उसमें भुज हैं

चूँकि हर त्रिभुज के तीनों कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं और यहाँ इतने त्रिभुज हैं जितनी ऋजुभुज क्षेत्र की भुज हैं

इसलिये इन त्रिभुजों के सब कोन बराबर हैं उतने समकोनों के जो गिनती में क्षेत्र की भुजों की तादाद से दूने हैं

लेकिन इन त्रिभुजों के सब कोन ऋजुभुज क्षेत्र के सब अंतःकोनों के और उन कोनों के जो फ बिंदु पर हैं बराबर हैं

और जो कोन फ बिंदु पर जो इन त्रिभुजों का उभयनिष्ठ शीर्ष है बने हैं वह चार समकोन के बराबर हैं (अनु० ३ सा० १३)

इसलिये इन त्रिभुजों के सब कोन बराबर हैं ऋजुभुज क्षेत्र के सब अंतःकोनों और चार समकोन के

लेकिन सावित होचुका है कि इन त्रिभुजों के सब कोन उतने समकोनों के भी बराबर हैं जो गिनती में ऋजुभुज क्षेत्र की भुजों की तादाद से दूने हैं

इसलिये ऋजुभुज क्षेत्र के सब अंतःकोन और चार समकोन मिलकर बराबर हैं उतने समकोन के जो गिनती में ऋजुभुज क्षेत्र की भुजों की तादाद से दूने हैं

टि० १ यह अनुमान इस तरह भी सावित होसक्ता है

अगर किसी अबसदय ऋजुभुज क्षेत्र के किसी द कोन से सामने के कोनों तक सीधी रेखा खींची जाय तो जाहिर है कि वह क्षेत्र उतने त्रिभुजों में बट जायगा जो गिनती में उस क्षेत्र की भुजों की तादाद से दो कम हैं



( ८३ )

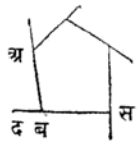
चूँकि त्रिभुज के तीनों कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं और यहाँ इतने त्रिभुज हैं कि उनकी तादाद उस क्षेत्र की भुजों की तादाद से दो कम है इसलिये त्रिभुजों के सब कोन मिलकर बराबर हैं उतने समकोन के जो गिनती में क्षेत्र की भुजों की तादाद के दूने से चार कम हैं लेकिन इन त्रिभुजों के सब कोन मिलकर बराबर है ऋजुभुज क्षेत्र के सब अन्तःकोनों के इसलिये ऋजुभुज क्षेत्र के सब अन्तःकोन मिलकर बराबर हैं उतने समकोन के जो गिनती में उस क्षेत्र की भुजों की तादाद के दूने से चार कम हैं इसलिये ऋजुभुज क्षेत्र के सब अन्तःकोन और चार समकोन मिलकर बराबर हैं उतने समकोनों के जो गिनती में उस क्षेत्र की भुजों की तादाद से दूने हैं



टि० २ इस अनुमान की मदद से हर सम बहुभुज समान कोन क्षेत्र ( जिसकी सब भुज और सब कोन आपस में समान हों ) के कोन की कीमत दर्याफ्त होसकती है अगर उसकी भुजों की तादाद मालूम हो

**अनु० २** हर ऋजुभुज क्षेत्र के सब बहिःकोन जो उसकी भुजों को एक दूसरी के बाद एकही तरफ में बढ़ाने से पैदा होते हैं मिलकर चार समकोन के बराबर होते हैं

चूँकि हर अन्तःकोन मसलन् अब स मय अपने पास के अब द बहिःकोन के दो समकोन के बराबर है



इसलिये सब अन्तःकोन मय अपने पास के बहिःकोनों के बराबर हैं उतने समकोनों के जो गिनती में ऋजुभुज क्षेत्र की भुजों की तादाद से दूने हैं लेकिन यह ऊपर के अनुमान से साबित है कि ऋजुभुज क्षेत्र के सब अन्तःकोन और चार समकोन मिलकर बराबर हैं उतने समकोन के जो गिनती में उस क्षेत्र की भुजों की तादाद से दूने हैं

इसलिये सब अन्तःकोन और सब बहिःकोन मिलकर बराबर हैं सब अन्तःकोनों और चार समकोन के

स्व० १

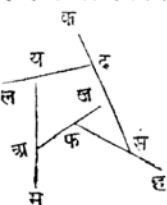
इन बराबरों में से अन्तःकोनों को निकाल डाला

इसलिये सब बहिःकोन चार समकोन के बराबर हैं स्व० ३

टि० १ इस अनुमान की मदद से हर समबहुभुज समानकोन क्षेत्र की भुजों की तादाद मालूम होसकती है अगर उसके एक कोन की कीमत मालूम हो

( ८४ )

टि० २ यह दोनों अनुमान सिमसन साह्य ने ज़ियादा किये हैं दूसरे अनुमान में बयान करना चाहिये था कि ऋजुभुज के बहिःकोन से क्या सुराद है अगर उस बिंदु से जहां ऋजुभुज क्षेत्र की दो भुज मिलती हैं उन भुजों में से कोई भुज बढ़ायी जाय तो कोन जो उस भुज के बढ़े हुए हिस्से और दूसरी भुज से बनेगा ऋजुभुज क्षेत्र का बहिःकोन होगा दो भुजों में से कोई भी भुज बढ़ायी जाय एकही बात है—क्योंकि कोन जो इस तरह बनेगा दोनों आपस में पंद्रहवीं साध्य से बराबर होंगे उल्टे इस ने उन्ही ऋजुभुज क्षेत्र का बयान किया है जिनके सब कोनों का रख अन्दर की तरफ है एक और तरफ का ऋजुभुज क्षेत्र भी ऐसा बन सकता है कि उसमें कोन अ फ स का रख बाहर की तरफ है लेकिन यह कोन क्षेत्र अ फ स द य का अन्तःकोन नहीं है इस कोन के दखे इस क्षेत्र में अन्तःकोन वह कोन है जो चार समकोन से बक़्दर कोन अ फ स का म है ऐसे अन्तःकोन को जो दो समकोन से बड़ा है पुनर्युक्त कोन कहते हैं बत्तीसवीं साध्य का पहला अनुमान तो उन क्षेत्रों में भी जिनमें एक या कई अन्तःकोन पुनर्युक्त हैं साबित होसक्ता है लेकिन दूसरा अनुमान ऐसे क्षेत्रों में साबित नहीं होता अगर किसी ऋजुभुज क्षेत्र अ फ स द य का अन्तःकोन बिंदु फ पर पुनर्युक्त हो तो अस मिलाने और उसको स की तरफ बढ़ाने से साबित होजायगा कि कोन म अ फ और ह स द और क द य और ल य अ मिलकर चार समकोन के बक़्दर कोन ज फ स ज़ियादा है



टि० ३ बत्तीसवीं साध्य से और भी कई अनुमान निकलते हैं और वह अनुमान यह हैं

३—अगर त्रिभुज के दो कोनों की मिक़दार मालूम है तो तीसरे कोनको भी मिक़दार मालूम है क्योंकि त्रिभुज के तीनों कोन मिलकर बराबर दो समकोन के होते हैं

४—अगर त्रिभुज का एक कोन समकोन है तो बाकी दो कोन मिलकर एक समकोन के बराबर हैं और अगर त्रिभुज के दो कोन मिलकर तीसरे कोन के बराबर हैं तो तीसरा कोन समकोन है

५—अगर एक त्रिभुज के दो कोन मिलकर तीसरे कोन से छोटे हैं तो तीसरा कोन अधिक कोन है और अगर बड़े हैं तो तीसरा कोन न्यूनकोण है

६—समद्विबाहु त्रिभुज का हर एक कोन दो समकोन की एक तिहाई यात्री एक समकोन की दो तिहाई है इस अनुमान की मदद से समकोन के तीन बराबर हिस्से होसक्ते हैं

७—अगर समद्विबाहु त्रिभुज का प्रीर्षकोन समकोन है तो बाकी दो कोनों में से हर एक आधा समकोन है

( ८५ )

८—अगर किसी त्रिभुज के दो कोन दूसरे त्रिभुज के दो कोनों के बराबर हों तो उस त्रिभुज का तीसरा कोन भी दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोन के बराबर है।

९—चतुर्भुज क्षेत्र के सब कोन मिलकर चार समकोण के बराबर हैं (यह अनुमान नियमन माह्व के पहले अनुमान की एक खास सूत्र है लेकिन चूंकि इसका काम अक्सर जगह पर आया है इसलिये याद रखने के लायक है)

## अभ्यास

( ८६ ) अगर समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के सिरे से उसकी भुजों पर लंब गिराये जायें तो उन कोनों में से जो यह लंब आधार के साथ पैदा करेगा हर एक शीर्षकोन से आधा होगा।

( ८७ ) किसी त्रिभुज अबस की भुजों पर बाहर की तरफ बसद, सद्य और अक्ष समद्विबाहु त्रिभुज बनाये गये हैं साबित करो कि अद, बय और सज रेखा आपस में बराबर हैं।

( ८८ ) समानकोन समअक्षभुज के एक कोन की भिन्नता बताओ।

( ८९ ) एक समभुज समानकोन क्षेत्र का एक अन्तःकोन बराबर  $1\frac{1}{2}$  समकोण के है तो बताओ कि उस क्षेत्र में कितनी भुज हैं।

( ९० ) दो दिये हुए बिंदुओं से ऐसी सीधी रेखा खींचो कि वह एक सीधी रेखा के साथ बिना संपर्क दिया हुआ है एक समद्विबाहु त्रिभुज बनावे यह भी बताओ कि किस हालत में समद्विबाहु त्रिभुज न बन सकेगा।

( ९१ ) अगर दो सीधी रेखा किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के ऊपर के कोनों के दोर बराबर हिसी करें और वह रेखा बढ़कर किसी बिंदु पर एक दूसरी से मिलें तो साबित करो कि कोन जो उन रेखाओं के मिलने से पैदा होगा समद्विबाहु त्रिभुज के बहिःकोन के बराबर होगा।

( ९२ ) समद्विबाहु त्रिभुज का शीर्ष अ है और ब अ भुज बिंदु द तक इतनी बढ़ा दी गई है कि अद बराबर ब अ के है और स द खींची गयी है साबित करो कि ब स द समकोन है।

( ९३ ) दो सीधी रेखा बद और सद किसी त्रिभुज अबस के बहिःकोन ब और स के दो बराबर हिसी करती है और बिंदु द पर मिलती है साबित करो कि कोन व द स और कोन ब अ स का आधा मिलकर एक समकोन है।

( ९४ ) ऐसा समद्विबाहु त्रिभुज बनाओ कि उसका शीर्षकोन उसके आधार पर के हर एक कोन से छोटा हो।

( ९५ ) त्रिभुज अबस की भुज ब स बिंदु य पर और भुज अ व बिंदु ज पर दो बराबर हिसी में बढ़ती है अ य बिंदु फ तक इतनी बढ़ा दी गयी है कि य फ बराबर है अ य के और स ज बिंदु ह तक इतनी बढ़ा-

( ८६ )

यी गयी है कि जह बराबर है सज के तो साबित करो कि फ व और हव एक ही सीधी रेखा में है

( ८६ ) एक ऐसा समदिवाहु त्रिभुज बनाओ कि उसके आधार पर के हर एक कोन की तिहाई उसके शीर्ष कोन के आधे के बराबर हो

( ८७ ) अब और अस ऐसी दो सीधी रेखा हैं जिनका सुकाम दिया हुआ है इन दोनों रेखाओं में ऐसे दो बिंदु म और क दर्याफ्त करो कि अगर म और क मिलाये जावें तो अ म और म क मिलकर एक ही हुई सीधी रेखा के बराबर हों और उनके बीच का कोन एक दिखे हुए कोन के बराबर हो

( ८८ ) समदिवाहु त्रिभुज के आधार के सिरों से शीर्ष से दूर मिस्र में ऐसी दो रेखा खींची गयी हैं कि उनमें से हर एक आधार के साथ ऐसा कोन बनाती है कि वह त्रिभुज के बराबर कोनों में से हर एक का तिहाई है और यह रेखा और त्रिभुज के भुज बढ़कर आपस में मिलते हैं तो साबित करो कि तीन त्रिभुज जो आधार के नीचे पैदा होंगे वह समदिवाहु होंगे

( ८९ ) दो सीधी रेखा अ य व और स य द बिंदु य पर एक दूसरी को काटती हैं और सीधी रेखा अस और द व दो त्रिभुज अस य और व य द बनाती हुई खींची गयी हैं और कोन अस य और द व य रेखा स फ और व फ से जो बिंदु फ पर मिलती हैं दो दो बराबर दिस्यों से बटते हैं साबित करो कि कोन य अस और य द व मिलकर कोन स फ व से दूने हैं

( १०० ) अगर त्रिभुज के किसी कोन से उस कोन के सामने की भुज के बीचों बीच के बिंदु तक रेखा खींची जाय तो वह रेखा उस भुज के आधे के बराबर या उसके आधे से बड़ी या छोटी होगी सुताविक इसके कि कोन जिससे रेखा खींची गयी है समकोन या अधिक कोन या न्यूनकोन है

( १०१ ) त्रिभुज का कोई कोन समकोन या अधिक कोन या न्यूनकोन होगा सुताविक इसके कि सीधी रेखा जो उस कोन से उसके सामने की भुज के बीचों बीच के बिंदु तक खींची जाय उस भुज के आधे के बराबर या उसके आधे से बड़ी या छोटी होगी

( १०२ ) त्रिभुज अब स के कोन अ से उसके सामने की भुज पर एक लंब गिराया गया है और वह लंब उस भुज या उसके बड़े हुए हिस्से से बिंदु द पर मिलता है और कोन व से उसके सामने की भुज पर एक लंब गिराया गया है और वह लंब उस भुज या उसके बड़े हुए हिस्से से बिंदु य पर मिलता है तो दो सीधी रेखा जो द और य बिंदुओं से आधार अब के बीचों बीच के बिंदु तक खींची जायंगी आपस में बराबर होंगी

( ८७ )

( १०३ ) किसी त्रिभुज के आधार के कोनों से उनकी सामने की भुजों पर लंब गिराये गये हैं और यह लंब उन भुजों या उनके बड़े हुए हिस्सों से मिलते हैं तो वह सीधी रेखा जो उन बिंदुओं के समियान जहां लंब भुजों या उनके बड़े हुए हिस्सों से मिलते हैं उस लंब से जो आधार के बीचोंबीच के बिन्दु से उस रेखा पर गिराया जाय दो बराबर हिस्सों में बाँटेगी

( १०४ ) अगर अब स और अब द दो समकोन त्रिभुज अब कर्ण पर हों और उनके स और द शीर्ष मिलाये जाय तो चतुर्भुज के हर भुज के सामने के दो दो कोन जो इस तरह पैदा होंगे आपस में बराबर होंगे

( १०५ ) पहले अध्याय की पहली साध्य में वृत्त एक दूसरे को स और ह बिन्दुओं पर काटते हैं और अब बढ़कर एक वृत्त से बिन्दु क पर मिलती है साबित करो कि स ह क समबिबाहु त्रिभुज है

( १०६ ) समबिबाहु त्रिभुज के आधार पर के कोनों को दो बराबर हिस्सों में बाँटनेवाली सीधी रेखा त्रिभुज के भुजों से द और य बिन्दुओं पर मिलती है साबित करो कि द य त्रिभुज के आधार के समानान्तर है

( १०७ ) अब और अ स दो दी हुई सीधी रेखा हैं अब में एक बिन्दु स दिया हुआ है म से ऐसी सीधी रेखा खींचो कि वह अ स से क बिन्दु पर मिलकर अ म क कोन अ क म कोन से तिगुना बनावे

( १०८ ) समकोन त्रिभुज बनाओ जिसकी दो भुजों का योग और कर्ण मालूम है

( १०९ ) समकोन त्रिभुज बनाओ जिसकी दो भुजों का अन्तर और कर्ण मालूम है

( ११० ) समकोन त्रिभुज बनाओ जिसका कर्ण और लंब जो समकोन से कर्ण पर गिरा है मालूम है

( १११ ) समकोन त्रिभुज बनाओ जिसकी तीनों भुजों का योग और जिसका एक कोन मालूम है

( ११२ ) समकोन के तीन बराबर हिस्से करो

( ११३ ) दी हुई परमिति सीधी रेखा के तीन बराबर हिस्से करो

( ११४ ) दिये हुए बिन्दु से दो समानान्तर रेखाओं तक ऐसी दो बराबर रेखा खींचो कि वह एक दूसरी के साथ समकोन बनाती हों

( ११५ ) त्रिभुज जिसकी तीनों भुजों का योग मालूम है ऐसा बनाओ कि उसके कोन दिये हुए त्रिभुज के कोनों के बराबर हों

( ११६ ) त्रिभुज अब स के बहिःकोन ब स द को रेखा स य और अन्तःकोन व अ स की रेखा अ य दो बराबर हिस्सों में बाँटती हैं और




( ८८ )

यह दोनों रेखा य बिंदु पर मिलती हैं साबित करो कि कोन अ व स कोन अवस का आधा है

( ११७ ) अगर किसी ऋजुभुज चैत्र के जिसमें भुजों का प्रुमार ( न ) है भुज दोनों तरफ बढ़ाये हैं तो सब कोन जो पहले और तीसरे भुज और दूसरे और चौथे भुज और तीसरे और पांचवे भुज इत्यादि और अखीर और पहले भुज से दनेगे मिलकर २ ( न-४ ) समकोन के बराबर होंगे

### साध्य ३३ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** सीधी रेखा जो दो बराबर समानान्तर सीधी रेखाओं के एक एक तरफ के सिरों को मिलाती हैं आपस में बराबर और समानान्तर होती हैं

**वि० सूत्र** फर्ज करो कि अव और सद दो बराबर और समानान्तर सीधी रेखा हैं और उनके एक एक तरफ  के सिरों को अस और वद सीधी रेखा मिलाती हैं

तो अस और वद आपस में बराबर और समानान्तर होंगी

**अं० वस** मिलाओ

अ० १

**उप०** चूंकि अव समानान्तर सद की है और वस उन पर गिरती है

इसलिये कोन अवस बराबर है एकान्तर कोन वसद के

सा० २८

और चूंकि अव बराबर है सद के और वस दो त्रिभुज अवस और दसव में उभयनिष्ठ है यानी दो भुज अव और वस अलग अलग बराबर हैं दो भुजों दस और सव के और कोन अवस बराबर कोन दसव के साबित हो चुका है

इसलिये आधार अस बराबर है आधार वद के और त्रिभुज अवस बराबर है त्रिभुज दसव के और बाकी कोन एक



( ८६ )

त्रिभुज के अलग अलग बराबर हैं दूसरे त्रिभुज के बाकी कोनों के यानी वह कोन आपस में बराबर हैं जिनके सामने के भुज बराबर हैं सा० ४

इसलिये कोन अस ब बराबर है कोन स व द के

और चूंकि सीधी रेखा व स दो सीधी रेखा अस और व द पर गिर कर उनके साथ बराबर एकांतर कोन अस व और स व द बनाती है

इसलिये अस समानांतर है व द की सा० २७

और अस बराबर व द के साबित हो चुकी है

**फल** इसलिये सीधी रेखा जो दो बराबर और समानांतर सीधी रेखाओं अद्योपांत—यही साबित करना था अनुमान चतुर्भुज क्षेत्र जिसकी आमने सामने की भुज बराबर और समानांतर हों समानांतर चतुर्भुज है

टि० इस साध्य में यह शर्त कि सीधी रेखा एक एक तरफ़ के सिरों को मिलाती है जरूरी है क्योंकि अगर यह शर्त नहो तो प्रुबह पड़ेगा कि गया सीधी रेखा अस और व द बिन्दुओं अ और स को और व और द को मिलाती है या सीधी रेखा अ द और व स बिन्दुओं अ और द को और व और स को मिलाती है

## अभ्यास

(११८) अगर कोई सीधी रेखा जो दो असमानांतर बराबर रेखाओं एक ही तरफ़ के सिरों को मिलाती है उन रेखाओं के साथ अपनी एक ही तरफ़ में बराबर कोन बनावे तो साबित करो कि उन रेखाओं के दूसरी तरफ़ के सिरों को मिलाने वाली रेखा पहली रेखा के समानांतर होगी

(११९) त्रिभुज के आधार के सिरों से जो रेखा सामने की भुजों तक फैली जायें तो वह किसी मूरत में एक दूसरी को दो बराबर हिस्सों में काटेगी

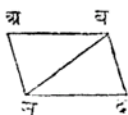
## साध्य ३४ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र समानांतर चतुर्भुज की आमने सामने की भुज

( १०० )

और कोन आपस में बराबर होते हैं और कर्ण उसको दो बराबर हिस्सों में बांटता है

**वि० सूत्र** फ़र्ज करो कि **अवदस** समाना-  
न्तर चतुर्भुज है और **वस** उसका कर्ण है तो **अव**  
बराबर होगी **सद** के और **अस** बराबर होगी **वद** के और  
कोन **अवद** बराबर होगा कोन **असद** के और कोन **वअस**  
बराबर होगा कोन **वदस** के और कर्ण **वस** समानान्तर च-  
तुर्भुज **अवदस** के दो बराबर हिस्से करेगा



**उप०** चूँकि **अव** समानान्तर **सद** की है और **वस** उन  
पर गिरती है

इसलिये कोन **अवस** बराबर है एकान्तर कोन **वसद**  
के सा० २८

और चूँकि **अस** समानान्तर **वद** की है और **सव** उन  
पर गिरती है

इसलिये कोन **असव** बराबर है एकान्तर कोन **सवद**  
के सा० २८

अब चूँकि दो त्रिभुज **अवस** और **दसव** में एक त्रिभुज  
के दो कोन **अवस** और **वसअ** अलग अलग बराबर हैं  
दूसरे त्रिभुज के दो कोनों **वसद** और **सवद** के और भुज  
**वस** दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ है

इसलिये बाकी भुज इन त्रिभुजों की अलग अलग बराबर हैं  
और एक त्रिभुज का तीसरा कोन बराबर दूसरे त्रिभुज के तीसरे  
कोन के यानी भुज **अव** बराबर है भुज **सद** के और भुज **अस**  
बराबर है भुज **वद** के और कोन **वअस** बराबर है कोन **सदव**  
के सा० २६

( १०१ )

फिर चूंकि कोन अवस बराबर कोन वसद के है और  
कोन सवद बराबर कोन असव के है

इसलिये कुल कोन अवद बराबर है कुल कोन असद  
के स्व० २

और कोन वअस बराबर कोन वदस के सावित हो-  
सका है

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज की आमने सामने की भुज और  
कोन आपस में बराबर होते हैं और कर्ण उसके दो बराबर हि-  
स्से करता है

चूंकि अव बराबर है सद के और वस उभयनिष्ठ है  
यानी दो भुज अव और वस अलग अलग बराबर हैं दो भुजों  
दस और सव के

और कोन अवस बराबर कोन वसद के सावित हो-  
सका है

इसलिये त्रिभुज अवस बराबर है त्रिभुज दसव के (सा० ४)

इसलिये वस कर्ण अवदस समानान्तर चतुर्भुज के दो  
बराबर हिस्से करता है

फल इसलिये समानान्तर चतुर्भुज की आमने सामने की  
भुज और कोन आद्योपान्त—यही सावित करना था

टि०१ अगर इस साध्य में दूसरा कर्ण भी खींचा जाय तो सावित होसका  
है कि वह भी समानान्तर चतुर्भुज के दो बराबर हिस्से करेगा और दोनों  
कर्ण एक दूसरे के दो दो बराबर हिस्से करेंगे अगर समानान्तर चतुर्भुज  
का एक कोन समकोण हो तो उसके सब कोन समकोण होंगे और दोनों  
कर्ण आपस में बराबर होंगे और अगर समानान्तर चतुर्भुज वर्गक्षेत्र था  
विषमकोण समचतुर्भुज है तो उसके कर्ण एक दूसरे के दो बराबर हिस्से का-  
रेगे और एक दूसरे के साथ समकोण बनावेंगे तालिवइल्म की चाहिये  
कि इन बातों को सावित करके याद रखे क्योंकि यह बड़े काम की बातें हैं

टि० २ इस साध्य में तीन साध्य शामिल हैं पहली यह कि “समानान्तर

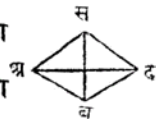
( १०२ )

चतुर्भुज की आसने सामने की भुज बराबर होती है ” दूसरी यह कि “ समानान्तर चतुर्भुज के आसने सामने के कोन बराबर होते हैं ” तीसरी यह कि “ समानान्तर चतुर्भुज का हर कर्ण उसके दो बराबर हिस्से करता है ” इन तीनों साध्यों के बिलोम यानी “ अगर किसी चतुर्भुज क्षेत्र की आसने सामने की भुज या कोन आपस में बराबर हों या चतुर्भुज का हर कर्ण उसके दो बराबर हिस्से करता हो तो वह चतुर्भुज क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुज होगा उल्लेख ने नहीं साबित किये हैं यह बिलोम हर हालत में सही हैं तालिबइल्म को चाहिये कि इनको साबित कर याद रखे

टि० ३ अगर किसी चतुर्भुज अबदस में जिसके कर्ण अद और वस हैं नीचे लिखी हुई दस खासियतों में से कोई दो खासियतें पायी जावें तो साबित होसक्ता है कि वह क्षेत्र समानान्तर चतुर्भुज होगा

१ अव और सद का आपस में समानांतर होना

२ अस और वद का आपस में समानांतर होना



३ अव और सद का आपस में बराबर होना

४ अस और वद का आपस में बराबर होना

५ वअस और सदव कोनों का आपस में बराबर होना

६ अवद और दसअ कोनों का आपस में बराबर होना

७ वस का अद को दो बराबर हिस्सों में बांटना

८ अद का वस को दो बराबर हिस्सों में बांटना

९ अद से चतुर्भुज क्षेत्र अवदस के धरातल का दो बराबर हिस्सों में बांटना

१० वस से चतुर्भुज क्षेत्र अवदस के धरातल का दो बराबर हिस्सों में बांटना

जब इन दस खासियतों में से तुम दो दो की तर्तीब लोगे तो यह पैतालीस तर्तीबें पैदा होंगी

१ { अव और सद का आपस में समानान्तर होना

{ अस और वद का आपस में समानान्तर होना

२ { अव और सद का आपस में समानान्तर होना

{ अव और सद का आपस में बराबर होना

( १०३ )

- ३ { अ व और स द का आपस में समानान्तर होना  
 { अ स और व द का आपस में बराबर होना
- ४ { अ व और स द का आपस में समानान्तर होना  
 { व अ स और स द व कीनों का आपस में बराबर होना
- ५ { अ व और स द का आपस में समानान्तर होना  
 { अ व द और द स अ कीनों का आपस में बराबर होना
- ६ { अ व और स द का आपस में समानान्तर होना  
 { व स का अ द को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- ७ { अ व और स द का आपस में समानान्तर होना  
 { अ द का व स को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- ८ { अ व और स द का आपस में समानान्तर होना  
 { अ द से चतुर्भुज क्षेत्र अ व स द के धरातल का दो बराबर हिस्सों में बांटना
- ९ { अ व और स द का आपस में समानान्तर होना  
 { व स से चतुर्भुज क्षेत्र अ व स द के धरातल का दो बराबर हिस्सों में बांटना
- १० { अ स और व द का आपस में समानान्तर होना  
 { अ व और स द का आपस में बराबर होना
- ११ { अ स और व द का आपस में समानान्तर होना  
 { अ स और व द का आपस में बराबर होना
- १२ { अ स और व द का आपस में समानान्तर होना  
 { व अ स और स द व कीनों का आपस में बराबर होना
- १३ { अ स और व द का आपस में समानान्तर होना  
 { अ व द और द स अ कीनों का आपस में बराबर होना

( १०४ )

- १३ { अस और व द का आपस में समानान्तर होना  
व स का अ द को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- १४ { अस और व द का आपस में समानान्तर होना  
अ द का व स को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- १६ { अस और व द का आपस में समानान्तर होना  
अ द से चतुर्भुज क्षेत्र अवस द के धरातल का दो ब-  
राबर हिस्सों में बांटना
- १७ { अस और व द का आपस में समानान्तर होना  
व स से चतुर्भुज क्षेत्र अवस द के धरातल का दो ब-  
राबर हिस्सों में बांटना
- १८ { अव और स द का आपस में बराबर होना  
अस और व द का आपस में बराबर होना
- १९ { अव और स द का आपस में बराबर होना  
व अस और स द व कीनों का आपस में बराबर होना
- २० { अव और स द का आपस में बराबर होना  
अव द और द स अ कीनों का आपस में बराबर होना
- २१ { अव और स द का आपस में बराबर होना  
व स का अ द को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- २२ { अव और स द का आपस में बराबर होना  
अ द का व स को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- २३ { अव और स द का आपस में बराबर होना  
अ द से चतुर्भुज क्षेत्र अवस द के धरातल का दो ब-



( १०५ )

रावर हिस्सों में बांटना

२४ { अव और सद का आपस में बराबर होना  
 वस से चतुर्भुज क्षेत्र अवसद के धरातल का दो व-  
 रावर हिस्सों में बांटना

२५ { अस और वद का आपस में बराबर होना  
 वअस और दसअ कीनों का आपस में बराबर होना

२६ { अस और वद का आपस में बराबर होना  
 अवद और दसअ कीनों का आपस में बराबर होना

२७ { अस और वद का आपस में बराबर होना  
 वस का अद को दो बराबर हिस्सों में बांटना

२८ { अस और वद का आपस में बराबर होना  
 अद का वस को दो बराबर हिस्सों में बांटना

२९ { अस और वद का आपस में बराबर होना  
 अद से चतुर्भुज क्षेत्र अदसद के धरातल का दो बरा-  
 वर हिस्सों में बांटना

३० { अस और वद का आपस में बराबर होना  
 वस से चतुर्भुज अवसद के धरातल का दो बराबर  
 हिस्सों में बांटना

३१ { वअस और सदव कीनों का आपस में बराबर होना  
 अवद और दसअ कीनों का आपस में बराबर होना

३२ { वअस और सदव कीनों का आपस में बराबर होना  
 वस का अद को दो बराबर हिस्सों में बांटना

३३ { वअस और सदव कीनों का आपस में बराबर होना  
 अद का वस को दो बराबर हिस्सों में बांटना

( १०६ )

- ३४ { वअस और सदव कीनों का आपस में बराबर होना  
अद से चतुर्भुज अवसद के धरातल का दो बराबर  
हिस्सों में बांटना
- ३५ { वअस और सदव कीनों का आपस में बराबर होना  
वस से चतुर्भुज अवसद के धरातल का दो बराबर  
हिस्सों में बांटना
- ३६ { अवद और दसअ कीनों का आपस में बराबर होना  
वस का अद को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- ३७ { अवद और दसअ कीनों का बराबर होना  
अद का वस को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- ३८ { अवद और दसअ कीनों का बराबर होना  
अद से चतुर्भुज अवसद के धरातल का दो बराबर  
हिस्सों में बांटना
- ३९ { अवद और दसअ कीनों का बराबर होना  
वस से चतुर्भुज अवसद के धरातल का दो बराबर  
हिस्सों में बांटना
- ४० { वस का अद को दो बराबर हिस्सों में बांटना  
अद का वस को दो बराबर हिस्सों में बांटना
- ४१ { वस का अद को दो बराबर हिस्सों में बांटना  
अद से चतुर्भुज अवसद के धरातल का दो बराबर  
हिस्सों में बांटना
- ४२ { वस का अद को दो बराबर हिस्सों में बांटना  
वस से चतुर्भुज अवसद के धरातल का दो बराबर  
हिस्सों में बांटना



( १०८ )

चूँकि दह और यक और अब आपस में समानान्तर हैं ( सा० ३० ) इसलिये कोन सयक और यदह और दअफ आपस में बराबर हैं ( सा० २६ ) और चूँकि सक, यह और दफ आपस में समानान्तर हैं ( सा० ३० ) इसलिये कोन यसक, दयह और अदफ सब आपस में बराबर हैं ( सा० २६ ) और यस, दय और अद बराबर बनायी गई हैं इसलिये यक, दह और अफ आपस में बराबर हैं ( सा० २६ ) चूँकि यक बराबर है जव के और दह बराबर है फज के ( सा० ३४ ) इसलिये जव, फज और अफ आपस में बराबर हैं

### अभ्यास

( १२० ) अगर किसी चतुर्भुज के दो भुज समानान्तर हों और बाकी दो भुज बराबर हों लेकिन समानान्तर न हों तो उसके आमने सामने के हर दो कोन मिलकर बराबर दो समकोन के होंगे

( १२१ ) अगर समानान्तर चतुर्भुज के आमने सामने के कोनों को मिलाने वाली रेखा उन कोनों के दो दो बराबर हिस्से करे तो उस समानान्तर चतुर्भुज के चारों भुज आपस में बराबर होंगे

( १२२ ) दिये हुए बिंदु से एक ऐसी रेखा खींचो कि उसका वह हिस्सा जो दी हुई समानान्तर रेखाओं के बीच में हो एक दी हुई लंबाई का हो

( १२३ ) सीधी रेखा जो किसी समानान्तर चतुर्भुज के दो आमने कोनों के दो दो बराबर हिस्से करती है समकोन बनाती हुई एक दूसरी को बाँटती है

( १२४ ) समानान्तर चतुर्भुज के आमने सामने के कोनों को दो दो बराबर हिस्सों में बाँटने वाली सीधी रेखा या तो समानान्तर होती है या एक दूसरी को एक लेती है

( १२५ ) अगर किसी समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण आपस में बराबर हों तो उसके सब कोन भी आपस में बराबर होंगे

( १२६ ) ऐसा बिंदु दर्याफ्त करो कि अगर उससे दो दी हुई रेखाओं पर लंब गिराये जायें तो वह लंब दो दी हुई सीधी रेखाओं के बराबर हों और यह भी बताओ कि ऐसे कितने बिंदु दर्याफ्त होसकते हैं

( १२७ ) एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो एक सीधी रेखा के बराबर हो और दूसरी सीधी रेखा की समानान्तर हो और उसके सिरे दो दी हुई सीधी रेखाओं पर हों

( १२८ ) समानान्तर चतुर्भुज अ व स द के अब, बस और स द भुजों पर समतिवाह त्रिभुज इस तरह बनाये गये हैं कि व स पर उस तरफ जिधर समानान्तर चतुर्भुज है और अ व और स द पर सामने की तरफ में तो साबित करो कि अ व और स द पर के त्रिभुजोंके शीर्ष कोनों की दूरी या उस त्रिभुजके शीर्षसे जो व स पर बनाया गया है अलग २ बराबर है

( १०६ )

समानांतर चतुर्भुज के कर्ण अ स और ब द के

( १२६ ) अगर किसी समानान्तर चतुर्भुज का कोण बढ़ता जाय लेकिन उन भुजों की लम्बाई जिनसे वह कोण बना है न बढ़े तो कर्ण जो उस कोण के शीर्ष में होकर गुजरता है कम होता जायगा

( १३० ) अ, ब और स ऐसे तीन बिंदु एक सीधी रेखा में हैं कि अ ब बराबर ब स के है साबित करो कि लम्ब जो अ और स से किसी सीधी रेखा पर जो अ और स के दर्मियान होकर नहीं गुजरती है गिराये जायें दोनों मिलकर दूने होंगे उस लम्ब के जो ब से उस रेखा पर गिराया जाय

( १३१ ) अगर समानान्तर चतुर्भुज के कोनों से किसी सीधी रेखा पर जो समानान्तर चतुर्भुज के बाहर हो लम्ब गिराये जायें तो दो लम्ब जो आमने सामने के कोनों से गिरेंगे मिलकर बराबर होंगे उन दो लम्बों के जो दूसरे दो आमने सामने के कोनों से गिरेंगे

( १३२ ) अगर घड़भुज क्षेत्र में आमने सामने के भुज बराबर और समानान्तर हों तो तीनों सीधी रेखा जो आमने सामने के कोनों को मिलावेंगी एकही बिंदु पर कटेंगी

( १३३ ) अ ब और अ स दो दी हुई सीधी रेखा हैं और उनके दर्मियान य दिया हुआ बिन्दु है य से ऐसी सीधी रेखा ज य हू खोंचो कि उसका हिस्सा ज ह जो दी हुई रेखाओं के दर्मियान हो बिंदु य पर हो बराबर टुकड़ों में बटे

( १३४ ) दिये हुए समानान्तर चतुर्भुज के अन्दर एक ऐसा विषमकोण समचतुर्भुज बनाओ कि उसके एक कोण का शीर्ष समानान्तर चतुर्भुज की एक भुजा के दिये हुए बिन्दु पर हो

( १३५ ) अ ब स द एक समानान्तर चतुर्भुज है और य और फ भुज अ द और ब स के बीचोंबीच के बिन्दु हैं साबित करो कि ब य और द फ कर्ण अ स को तीन बराबर हिस्सों में बांटेंगी

( १३६ ) समानान्तर चतुर्भुज को उसके एक भुज के दिये हुए बिन्दु से एक सीधी रेखा खोंचकर दो बराबर हिस्सों में बांटो

## सवालात इम्तिहान साध्य २७ से साध्य ३४ तक

( १ ) रेखागणित की उस परिभाषा और स्वयंमिह्वि को जो सीधी समानान्तर रेखाओं से सम्बन्ध रखती है बयान करो और यह भी बताओ कि उनका काम पहले अध्याय की कौन कौनसी साध्यों में पड़ा है

( २ ) आसन्नकोन, बहिःकोन, अन्तःकोन और एकांतर कोन की तारीफ़ करो और उनको कागज़ पर खोंचकर बताओ

( ३ ) सीधी समानांतर रेखाओं और उन रेखाओं की जो उन पर गिरती हैं खामियतें बयान करो

( ११० )

( ४ ) साबित करो कि सीधी समानांतर रेखाओं के बीच की दूरी हमेशा बराबर रहती है

( ५ ) अगर दो सीधी रेखा समानांतर न हों तो साबित करो कि फर्क उन एकांतर कोनों का जो और सीधी रेखा इन सीधी रेखाओं पर गिर कर पैदा करेंगी हमेशा वही एक कोन होगा

( ६ ) अट्ठाईसवीं साध्य का दूसरा हिस्सा बगैर सत्ताईसवीं साध्य की मद्दत के साबित करो

( ७ ) “ दो सीधी रेखा जो एक दूसरी को काटती हैं एकही सीधी रेखा की समानांतर नहीं होसکتी हैं” को स्वयंसिद्धि मानकर रेखागणित की बारहवीं स्वयंसिद्धि को उन्तीसवीं साध्य का एक नतीजा करार दो

( ८ ) साबित करो कि तीसवीं साध्य की जो छरत उल्लेख ने साबित की है वह इस कदर साफ़ ज़ाहिर है कि सुबूत की मुहताज नहीं है

( ९ ) द्वादसीसवीं साध्य के अंकन(बनावट)में यह इशारात “ अ द के दूसरी ओर” होना क्या ज़रूर है

( १० ) त्रिभुज की किसी भुजा के बिना बताए साबित करो कि त्रिभुज के तीनों कोन मिलकर बराबर दो समकोन के होते हैं

( ११ ) किसी त्रिभुजाकार कागज़ के कोनों को इस तरह मोड़ो कि जिससे नज़र को यह मालूम होजावे कि त्रिभुज के तीनों कोन मिलकर बराबर दो समकोन के होते हैं

( १२ ) अनुमान की तारीफ़ करो बत्तीसवीं साध्य के दोनों अनुमानों का दावा लिखो और पहले का कोई और सुबूत दो बत्तीसवीं साध्य से और कौन कौनसे अनुमान निकल सक्ते हैं

( १३ ) पुनर्युक्त कोन की तारीफ़ करो—बत्तीसवीं साध्य का कोनसा अनुमान उन छरतों में भी जिसमें एक या कई पुनर्युक्त कोन अन्तःकोन हों साबित होसक्ता है

( १४ ) समभुज ऋजुभुज क्षेत्र से क्या मुराद है जब किसी समभुज ऋजुभुज क्षेत्र के एक कोन की मिक़दार मालूम हो तो भुजों की तादाद किस तरह दर्याफ़्त करते हैं और अगर भुजों की तादाद मालूम हो तो उसके एक कोन की मिक़दार किस तरह दर्याफ़्त कर सक्ते हैं

( १५ ) उस समभुज ऋजुभुज क्षेत्र के भुजों की की तादाद बताओ जिसका बहिःकोन अपने आसन्न अन्तःकोन से दूना है

( १६ ) ३३ वीं साध्य में यह शर्त कि सीधी रेखा एक एक तरफ़ के सिरों को मिलाती है क्या ज़रूर है

( १७ ) अगर दो सीधी रेखा किसी दो और सीधी समानांतर रेखाओं के सुखूतलिफ़ तरफ़ के सिरों को मिलावे तो बताओ कि मिलाने वाली रेखा कब बराबर होगी और कब नाबराबर होगी



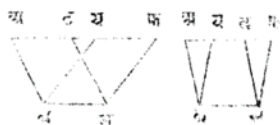
( १११ )

( १८ ) ३४ वीं साध्य के विनोम का दावा लिखो और साधित करो

( १९ ) अगर किसी समानांतर चतुर्भुज का एक कोन समकोण हो तो उसके सब कोने समकोण होते हैं और उसके कर्ण भी आपस में बराबर होते हैं और अगर वह समानांतर चतुर्भुज बगै वा विषमकोण समचतुर्भुज हो तो उसके कर्ण एक दूसरे को दो बराबर हिस्सों में बांटते हैं

**साध्य ३५ प्रमेयोपपाद्य****सा० सूत्र** समानांतर चतुर्भुज जो एकही आधार पर और एकही समानांतर रेखाओं के दर्मियान में होते हैं आपसमें बराबर होते हैं**वि० सूत्र** फर्ज करो कि समानांतर चतुर्भुज **अ व स द** और **य व स फ** एकही आधार **व स** पर और एकही समानांतर रेखाओं **अ स** और **अ फ** के दर्मियान हैंतो समानांतर चतुर्भुज **अ व स द** और **य व स फ** आपस में बराबर होंगे**उप०** अगर समानांतर चतुर्भुज **अ व स द** और **द व स फ** की भुज **अ द** और **द फ** जो आधार **व स** के सामने हैं एकही बिंदु **द** पर खतम हों तो जाहिर है कि हर समानांतर चतुर्भुज त्रिभुज **व द स** का दूना होगाइसलिये समानांतर चतुर्भुज **अ व स द** बराबर होगा समानांतर चतुर्भुज **द व स फ** के

स्व० ६

**लेकिन** अगर समानांतर चतुर्भुज **अ व स द** और **य व स फ** की भुज **अ द** और **य फ** जो आधार **व स** के सामने हैं

एकही बिंदु पर नहीं खतम हों

( ११२ )

तो चूंकि **अवसद** समानांतर चतुर्भुज है

इसलिये **अद** बराबर है **वस** के

सा० ३४

और इसी वजह से **यफ** बराबर है **वस** के

इसलिये **अद** बराबर है **यफ** के

स्व० १

और **दय** उभयनिष्ट है

इसलिये कुल या बाकी **अय** बराबर है कुल या बाकी  
**दफ** के

स्व० २ या ३

और **अव** बराबर है **दस** के

सा० ३४

अब त्रिभुज **यअव** और **फदस** में

चूंकि **फद** बराबर है **यअ** के और **दस** बराबर है  
**अव** के

और बहिःकोन **फदस** बराबर है अपने सामने के **यअव**  
अन्तःकोन के

सा० २८

इसलिये त्रिभुज **फदस** बराबर है त्रिभुज **यअव** के

चतुर्भुज **अवसफ** में से त्रिभुज **फदस** निकाल डाला

और उसी चतुर्भुज में से त्रिभुज **यअव** निकाल डाला

तो जो क्षेत्र बाकी रहेंगे आपस में बराबर होंगे

स्व० ३

इसलिये समानांतर चतुर्भुज **अवसद** बराबर है समानां-

तरचतुर्भुज **यवसफ** के

**फल** इसलिये समानांतर चतुर्भुज जो एकही आधार पर आ-  
द्योपांत-यही साबित करना था

टि० १ इस माध्य का दावा इस तरह भी बयान होमक्ता है कि समा-  
नांतर चतुर्भुज जो एकही आधार पर होते हैं, और जिनकी उंचाई एक  
ही है बराबर होते हैं

( ११३ )

परिभाषा—किसी समानांतर चतुर्भुज की उंचाई उस लंब की लंबाई है जो आधार पर उसके सामने के भुज के किसी बिन्दु से गिराया जाय

टि० २ इसमें और इसके आगे की कई साध्यों में बराबर होने से यह मतलब है कि धरातलों के सिर्फ क्षेत्रफल बराबर होते हैं

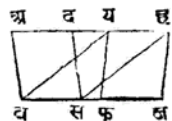
टि० ३ धरातल यानी ज़मीन की पैमायश की बुनियाद इसी साध्य पर है चूंकि रोज़मर्रा की कार्रवाई में आयत का रक़्बा यानी क्षेत्रफल उसकी लंबाई को चौड़ाई के साथ यानी आधार की उंचाई के साथ गुणा करने से दर्याफ़्त किया जाता है और चूंकि इस साध्य से साबित है कि जिन समानांतर चतुर्भुज का आधार और उसकी उंचाई यानी समानांतर रेखाओं के बीच के धरातल की चौड़ाई किसी आयत का आधार और उसकी उंचाई है तो उस समानांतर चतुर्भुज का रक़्बा उस आयत के रक़्बे के बराबर है इसलिये हर समानांतर चतुर्भुज का रक़्बा उसके आधार की लंबाई और उसकी उंचाई को आपस में गुणा देने से दर्याफ़्त होसکتा है

टि० ४ इस साध्य का बिलोम “यानी समानांतर चतुर्भुज जो एकही आधार पर और उसके एकहीतरफ़ में हैं और जिनके क्षेत्रफल आपस में बराबर हैं एकही समानांतर रेखाओं के दरमियान होंगे” उल्टाईस ने नहीं साबित किया है तालिबइल्म आप इसकी साबित करें

### साध्य ३६ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र समानान्तर चतुर्भुज जो बराबर आधारों पर और एकही समानान्तर रेखाओं के दरमियान होते हैं बराबर होते हैं

वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि समानान्तर चतुर्भुज



अ व स द और य फ़ ज ह बराबर आधार

व स और फ़ ज पर और एकही समानान्तर रेखाओं अ ह और व ज के दरमियान हैं

तो समानान्तर चतुर्भुज अ व स द बराबर होगा समानांतर चतुर्भुज य फ़ ज ह के

अं० व य और स ह मिलाओ

उप० चूंकि व स बराबर है फ़ ज के

फ़र्ज़

( ११४ )

और फ ज बराबर है य ह के

सा० ३४

इसलिये व स बराबर है य ह के

स्व० १

और यह दोनों आपस में समानान्तर भी हैं और इन रेखाओं के एक एक तरफ़ के सिरों को सीधी रेखा व य और स ह मिलाती हैं

लेकिन जो सीधी रेखा किसी दो बराबर और समानान्तर सीधी रेखाओं के एक एक तरफ़ के सिरों को मिलाती हों वह आपस में बराबर और समानान्तर होती हैं

सा० ३३

इसलिये व य और स ह आपस में बराबर और समानान्तर हैं

इसलिये य व स ह समानान्तर चतुर्भुज है

चूँकि समानान्तर चतुर्भुज अब स द और य व स ह एक ही आधार व स पर और एकही समानान्तर रेखाओं व स और और अ ह के दर्मियान हैं

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज अब स द और य व स ह आपस में बराबर हैं

सा० ३५

इसी तरह यह साबित होसक्ता है कि समानान्तर चतुर्भुज य फ ज ह बराबर है समानान्तर चतुर्भुज य व स ह के

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज अब स द बराबर है समानान्तर चतुर्भुज य फ ज ह के

**फल** इसलिये समानान्तर चतुर्भुज जो बराबर आधारों पर एक ही समानान्तर आधीपांत—यही साबित करना था

टि० १ इस साध्य का विलोम “ बराबर समानान्तर चतुर्भुज जो बराबर आधारों पर जो एकही सीधी रेखा में हैं और उन आधारों की एकही तरफ़ हैं एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान होंगे ” साबित करो

टि० २ इस साध्य और पैंतीसवीं साध्य का विलोम भी यानी “ बराबर समानान्तर चतुर्भुज जो एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हैं या तो एक

( ११५ )

है आधार पर या बराबर आधारों पर होंगे " सही है इसको साबित करो

### अभ्यास

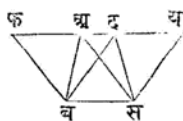
( १३७ ) अगर किसी समलंब चतुर्भुज की दो समानान्तर भुज मिलकर किसी समानान्तर चतुर्भुज के आधार की दूनी हों और वह समलंब चतुर्भुज और समानान्तर चतुर्भुज एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों तो यह समलंब चतुर्भुज और समानान्तर चतुर्भुज आपस में बराबर होंगे

( १३८ ) अगर किसी त्रिभुज अब स की भुजों अब और अ स पर समानान्तर चतुर्भुज फ व अ ज और ह अ स क बनाये गये हैं और उनके भुज फ ज और क ह जो त्रिभुज अब स की भुजों के समानान्तर हैं बिंदु न पर एक दूसरी को काटती हैं या बटकर आपस में मिलती हैं तो यह दोनों समानान्तर चतुर्भुज मिलकर बराबर होंगे समानान्तर चतुर्भुज व द य स के जो त्रिभुज के आधार व स पर बनाया गया है और जिसकी भुज व द बराबर है और समानान्तर है न अ के

### साध्य ३७ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र जो त्रिभुज एकही आधार पर और एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों वह आपस में बराबर होंगे

वि० सूत्र फर्ज करो कि अब स और द व स एकही आधार व स पर और एकही



समानान्तर रेखाओं अद और वस के दर्मियान हैं

तो त्रिभुज अब स बराबर होगा त्रिभुज द व स के

अं० अद की दोनों तरफ य और फ तक बढ़ाया

स से स य समानान्तर अब की और व से व फ समानान्तर सद की खींचो

सा० ३१

उप० तो अब स य और द स व फ समानान्तर चतुर्भुज हैं

और चूंकि यह समानान्तर चतुर्भुज एकही आधार व स पर और एकही समानान्तर रेखाओं अद और वस के दर्मियान हैं

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज अब स य बराबर है समानां-

( ११६ )

तर चतुर्भुज दसवफ के

सा० ३५

और त्रिभुज अबस समानांतर चतुर्भुज अबसय का  
आधा है और त्रिभुज दवस समानांतर चतुर्भुज दसवफ  
का आधा है

सा० ३४

लेकिन बराबर चीजों के आधे आपस में बराबर होते हैं सा० ७

इसलिये त्रिभुज अबस बराबर है त्रिभुज दसव के

**फल** इसलिये जो त्रिभुज एकही आधार पर और एकही स-  
मानांतर रेखाओं के आद्योपांत—यही साबित करना था

### अभ्यास

( १३६ ) अबस दिया हुआ त्रिभुज है एक ऐसा त्रिभुज बनाओ कि उसका क्षेत्रफल दिये हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर हो और उसका आधार दी हुई रेखा अद जो अब के सुकाम पर पड़ती है हो

( १४० ) अबस दिया हुआ त्रिभुज है एक ऐसा त्रिभुज बनाओ कि उसका शीर्ष बस के दिये हुए बिंदु पर हो और उसका आधार उसी रेखा में हो जिसमें अब है और उसका क्षेत्रफल दिये हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर हो

( १४१ ) अबस दिया हुआ त्रिभुज है एक ऐसा त्रिभुज बनाओ कि उसका क्षेत्रफल दिये हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर हो और उसका आधार उसी रेखा में हो जिसमें अब है और उसका शीर्ष एक रेखा में जो अब को समानांतर है हो

( १४२ ) अबसद दिया हुआ चतुर्भुज है उसके भुज अब पर एक ऐसा चतुर्भुज बनाओ कि उसका क्षेत्रफल दिये हुए चतुर्भुज के बराबर हो और उसकी एक भुज सद के एक दिये हुए बिंदु में होकर गुजरे और अब की समानांतर हो

( १४३ ) अबसद दिया हुआ चतुर्भुज है एक ऐसा त्रिभुज बनाओ कि उसका आधार अब की सीध में हो और उसका शीर्ष भुज सद के दिये हुए बिंदु पर हो और उसका क्षेत्रफल दिये हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर हो

( १४४ ) किसी दिये हुए ऋजुभुज क्षेत्र के बराबर एक त्रिभुज बनाओ

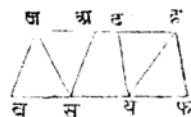


( ११७ )

## साध्य ३८ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र जो त्रिभुज बराबर आधारों पर एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों वह आपस में बराबर होते हैं

वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि अ व स और द य फ़ त्रिभुज बराबर आधारों व स और य फ़ पर और एकही समानान्तर रेखाओं अ द और व फ़ के दर्मियान हैं तो त्रिभुज



अ व स बराबर हीगा त्रिभुज द य फ़ के

अं० अ द की दोनों तरफ़ ज और ह बिन्दुओं तक बढ़ाया व से व ज समानान्तर अ स की ओर फ़ से फ़ ह समानान्तर द य की खींचो

सा० ३१

उप० तो ज व स अ और द य फ़ ह में से हर एक समानां-

तर चतुर्भुज है

प० अ-

और चूंकि यह समानांतर चतुर्भुज बराबर आधारों व स और

फ़ य पर और एकही समानांतर रेखाओं के दर्मियान हैं इस-

लिये यह समानांतर चतुर्भुज आपस में बराबर हैं (सा० ३६)

चूंकि कर्ण अ व स समानांतर चतुर्भुज ज व स अ के दी व-

रावर हिस्से करता है

सा० ३४

इसलिये त्रिभुज अ व स समानांतर चतुर्भुज ज व स अ का

आधा है

और चूंकि कर्ण द फ़ समानांतर चतुर्भुज द य फ़ ह के दी

बराबर हिस्से करता है

सा० ३४

इसलिये त्रिभुज द य फ़ समानांतर चतुर्भुज द य फ़ ह का

आधा है

लेकिन बराबर चौकों के आधे आपस में बराबर होते हैं (स्व० ७)

( ११८ )

इसलिये त्रिभुज अक्षर वरावर है त्रिभुज दक्ष फ के

**फल** इसलिये जो त्रिभुज वरावर आधारों पर और एकही

समानांतर रेखाओं के आयोपांत—यही साबित करना था

टि० १ इस साध्य की यह सूत्र कि वरावर आधारों पर के बिंदुओं के बीच एकही बिंदु पर है बड़ी कारव्यामद है

टि० २ इन साध्य में यह बात माननी गई है कि दोनों त्रिभुजों के आधार एकही सीध में हैं अगर प्रकृत में बिंदु य बिंदु स पर और बिंदु द बिंदु स पर हो तो एक त्रिभुज का कोन दूसरे त्रिभुज के कोन का पूरक होगा इसलिये यह नतीजा साबित हुआ कि अगर एक त्रिभुज की दो भुजा दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के बराबर बराबर हैं और उन भुजा से बने हुए कोण एक दूसरे के पूरक हैं तो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल आपस में बराबर है

टि० ३ सैतीसवीं और अड़तीसवीं साध्यों की इन तरह भी व्याख्य करते हैं “ त्रिभुज जो एकही आधार पर या वरावर आधारों पर होते हैं और जिनकी उंचाइयां बराबर होती हैं व्यापस में बराबर होते हैं ”

परिभाषा—किसी त्रिभुज की उंचाई वह लंब है जो आधार पर उस के सामने के कोन से गिराया जाता है

अनुमान—सीधी रेखा जो किसी त्रिभुज के आधार के बीचों बीच के बिंदु से उसके सामने के कोन तक खींची गई है वह त्रिभुज के दो बराबर हिस्से करती है

## अभ्यास

( १४५ ) समानांतर चतुर्भुज जिन चार त्रिभुजों में अपने फर्कों से बांटा है उन त्रिभुजों के क्षेत्रफल आपस में बराबर होते हैं

( १४६ ) अब स द समानांतर चतुर्भुज के कर्ण स द के किसी बिंदु ग से सीधी रेखा ग अ और ग स खींची गई है तो साबित करो कि त्रिभुज ग अ ब और ग स ब व्यापस में बराबर होंगे

( १४७ ) अब स एक त्रिभुज है और द और य भुजा अ ब और अ स के बीचों बीच के बिंदु हैं रेखा ब य और स द बिंदु फ पर एक दूसरीको काटती है साबित करो कि त्रिभुज ब फ स बराबर है चतुर्भुज अ द फ य के

( १४८ ) य और फ त्रिभुज अब स की भुजा अ ब और अ स के बीचों बीच के बिंदु हैं और अ द आधार ब स पर लंब है साबित करो कि कोन य द फ बराबर कोन अ स के है और चतुर्भुज अ य द फ त्रिभुज अ स का आधा है

( ११८ )

( १४६ ) एकही आधार पर उसकी व्यासने साझने की तरफों में बराबर क्षेत्रफलों के दो त्रिभुज हैं साबित करो कि आधार योंही या बढ़कर त्रिभुजों के शीर्षों के मिलाने वाली रेखा को दो बराबर हिस्सों में बांटती है

( १५० ) तीस समानांतर चतुर्भुज जो सब तरह व्यास में बराबर हैं इस तरह पर पास पान रखे गये हैं कि उनके आधार एकही सीधी रेखा में हैं पहले समानांतर चतुर्भुज के आधार के और तीसरे समानांतर चतुर्भुज के आधार के साझने के भुजों के एक एक तरफ के सिरे मिलाये गये हैं तो साबित करो कि यह नया समानांतर चतुर्भुज जो सिरे के मिलाने से बनता है उसका वह हिस्सा जो दूसरे समानांतर चतुर्भुज के दर्मियान है घरयक समानांतर चतुर्भुज का व्यास है

( १५१ ) किसी त्रिभुज की एक भुज में कोई बिंदु दिया हुआ है उस बिंदु से ऐसी रेखा खींचो कि वह त्रिभुज के दो बराबर हिस्से करे

( १५२ ) किसी द्विज ह्रम चतुर्भुज के कोन से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो कि वह चतुर्भुज के दो बराबर हिस्से करे

( १५३ ) अगर ऐसा त्रिभुज बनाया जाय कि उसकी दो भुज किसी चतुर्भुज क्षेत्र के कर्णों के अलग अलग बराबर हों और उन भुजों के बीच का कोन कर्णों के दर्मियान के किसी कोन के बराबर हो तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल उस चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर होगा

### साध्य ३० प्रमेयोपपाद्य

**सा० सूत्र** जो बराबर त्रिभुज एकही आधार पर और उसकी एकही तरफ में हों वह एकही समानांतर रेखाओं के दर्मियान होंगे

**दि० सूत्र** फल करो कि बराबर त्रिभुज अ व स और द व स एकही आधार व स पर और उसकी एकहीतरफ में हैं



तो त्रिभुज अ व स और द व स एकही समानांतर रेखाओं के दर्मियान होंगे

**अ०—अद मिलाओ**

तो अद समानांतर व स की होंगी

अगर अद समानांतर व स की नही

( १२० )

मुसक्तिन हो तो अ बिन्दु से अ य समानान्तर व स की और  
व द को या व द के बड़े झए हिस्से की य पर काटती हुई खींची  
और य स मिलाओ

उप० चूंकि त्रिभुज अव स और य व स एकही आधार व स  
पर और एकही समानान्तर रेखाओं व स और अ य के दर्मियान हैं

इसलिये त्रिभुज अव स बराबर है त्रिभुज य व स के (सा० ३७)

लेकिन त्रिभुज अ व स त्रिभुज द व स के बराबर है (फ़र्ज़)

इसलिये त्रिभुज द व स बराबर है त्रिभुज य व स के (ख० १)

यानी बड़ा त्रिभुज बराबर है छोटे त्रिभुज के और यह नामु-  
सक्तिन है

इसलिये अ य समानान्तर व स की नहीं है

और इसी तरह साबित होसक्ता है कि कोई सीधी रेखा सि  
वाय अ द के समानान्तर व स की नहीं खिंच सक्ती

इसलिये अ द समानान्तर व स की है

फ़लत इसलिये जो बराबर त्रिभुज एकही आधार पर आदो-  
पांत—यही साबित करना था

टि० यह साथ तीसरी साध्य का विलोम है

### अभ्यास

(१५४) रेखा अ व और स द एक दूसरी को बिंदु य पर काटती है  
और त्रिभुज अ य स बराबर है त्रिभुज व य द के साबित करो कि अ द  
समानान्तर व स की है

(१५५) रेखा जो किसी त्रिभुज की दो भुजों के बीचों बीच के बिंदुओं  
को मिलाती है वह आधार की आधी और समानान्तर होगी

(१५६) त्रिभुज अ व स के आधार व स में एक बिंदु द लो और अ द और

( १२१ )

दस और अब और बस को बिंदु य. फ. ज और ह पर आधा २ करो  
साबित करो कि यज और फ ह आपस में बराबर और समानांतर हैं

( १५७ ) सीधी रेखा जो किसी समानांतर चतुर्भुज के भुजों के बीचों  
बीच के बिंदुओं को मिलावे ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनावेंगी कि वह  
चतुर्भुज का आधा होगा

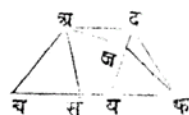
( १५८ ) किसी त्रिभुज की भुजों के बीचों बीच के बिंदु दिये हुए हैं  
उस त्रिभुज को बनावें

### साध्य ४० प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र जो बराबर त्रिभुज बराबर आधारों पर जो एक  
ही सीध में है और उन आधारों पर एकही तरफ में हैं वह एक  
ही समानांतर रेखाओं के दर्मियान होते हैं

वि० सूत्र फर्ज करो कि बराबर त्रिभुज अब स और द य फ  
बराबर आधारों व स और य फ पर जो एकही

सीध व फ में हैं और उन आधारों के एकही  
तरफ में



तो यह त्रिभुज एकही समानांतर रेखाओं के दर्मियान होंगे  
अं०—अद मिलाओ तो अद समानांतर व फ की होगी

अगर अद समानांतर व फ की नही

सुमकिन हो तो अज समानांतर व फ की और यद या य द  
के बड़े हुए हिस्से को बिंदु ज पर काटती हुई खींची

और ज फ मिलाओ

उप० चूंकि त्रिभुज अब स और ज य फ बराबर आधारों व स  
और य फ पर और एकही समानांतर रेखाओं अज और व फ  
के दर्मियान हैं

इसलिये त्रिभुज अब स बराबर है त्रिभुज ज य फ के सा० ३८

( १२२ )

लेकिन त्रिभुज अक्ष व स बराबर है त्रिभुज द य फ के ( फज )

इसलिये त्रिभुज द य फ बराबर है त्रिभुज ज य फ के ख० १

यानी बड़ा त्रिभुज बराबर है छोटे त्रिभुज के और यह बात ना-  
मुमकिन है

इसलिये अज समानांतर द फ की नहीं है

इसी तरह साबित होसता है कि कोई सीधी रेखा सिवाय  
अ द के द फ की समानांतर नहीं है

इसलिये अद समानांतर द फ की है

**फल** इसलिये जो बराबर त्रिभुज बराबर आधारों पर आधो-  
सांत यही साबित करना था

टि० १ यह साध्य अडतीसवीं साध्य का विलोम है और व्यतिरेक युक्ति  
से साबित की गयी है इसको बगैर व्यतिरेक युक्ति के इस तरह साबित  
करते हैं

ब द और स द मिलाओ

युक्ति त्रिभुज द ब स बराबर है त्रिभुज द य फ के ( सा० ३८ ) और  
त्रिभुज द य फ बराबर है त्रिभुज अ व स के ( फज ) इसलिये त्रिभुज अ व स  
बराबर है त्रिभुज द व स के ( ख० १ ) और इसलिये अ द समानांतर है  
व फ की ( सा० ३६ )

टि० २ सैंतीसवीं और अडतीसवीं साध्यों का दूसरा विलोम " अगर  
बराबर त्रिभुज एकही समानांतर रेखाओं के र्मियान हों या बराबर उं-  
चाई रखते हों तो वह या तो एकही आधार पर या बराबर आधारों पर  
होंगे " सही है इसको साबित करो

टि० ३ अगर शीर्ष उन सब बराबर त्रिभुजों के जो एकही आधार पर  
या एकही सीध के बराबर आधारों पर एकही तरफ हों मिलाये जाय तो  
एक सीधी रेखा पैदा होगी जो उन आधारों की समानांतर होगी इस  
सीधी रेखा को उन त्रिभुजों के शीर्ष की निधि कहते हैं

रेखागणित में बिन्दुओं की निधि वह सीधी या कुटिल रेखा है जिसका  
हर एक बिन्दु एक खास शर्त को पूरा करे और कोई और बिन्दु इस शर्त को  
पूरा करने वाला नही मसलन् दपणोदर धरातल में वह निधि बिन्दुओं  
की जिसका हर बिन्दु एक दिने हुए बिन्दु से दी हुई दूरी पर हो उस वृत्त



( १२३ )

की परिधि है जिसका केंद्र दिया हुआ बिन्दु है और जिसका व्यासार्ध दो छुई दूरी है और उन बिन्दुओं का जो किसी दो दिये हुए बिन्दुओं से बराबर दूरी पर है निधि वह मीधी रेखा है जो उन दो बिन्दुओं के मिलने वाली मीधी रेखा के दो बराबर हिस्से करती है और उसके साथ समकोण बनाती है

## अभ्यास

( १५६ ) उन बिन्दुओं की निधि दर्शाएँ जो दो छुई रेखा से दो छुई दूरी पर हों

( १६० ) उन बिन्दुओं की निधि दर्शाएँ जो किसी दिये हुए कोण की भुजाओं से बराबर दूरी पर हों

( १६१ ) उन बिन्दुओं की निधि दर्शाएँ जो किसी दिये हुए त्रुज की परिधि से दो छुई दूरी पर हों

( १६२ ) उन रेखाओं के बीचोंबीच के बिन्दुओं की निधि दर्शाएँ जो एक बिन्दु से एक दो छुई रेखा तक खींची गयी है

## सवालान्तर्द्विहान ३५ साध्य से ४० साध्य तक

( १ ) ३५ वीं साध्यमें लफूज “बराबर” किस मानी में इस्तेमाल हुआ है

( २ ) ३५ वीं साध्यमें एक समानान्तर चतुर्भुज को मीधी रेखाओं से किस तरह बाँटे कि अगर हिस्से को तरतीब दें तो एक और समानान्तर चतुर्भुज बन जावे

( ३ ) समानान्तर चतुर्भुज की उंचाई की तारीफ़ करो और साबित करो कि ३५ वीं साध्य में दोनों समानान्तर चतुर्भुजों की उंचाई बराबर है

( ४ ) ३५ वीं साध्य क्यों बहुत ज़रूरी खयाल की गई है

( ५ ) त्रिभुज की उंचाई से क्या सुराह है साबित करो कि बराबर त्रिभुजों को जो एक आधार पर या बराबर आधारों पर हैं उंचाई भी बराबर होती है चाहे वे त्रिभुज मीधी रेखा के एकही ओर या दोनों ओर हों

( ६ ) साबित करो कि अगर दो त्रिभुजों में से एक त्रिभुज के दो भुज दूसरे त्रिभुज के दो भुजों के आपस में बराबर हों और बीच के कोण पूरक हों तो वे त्रिभुज आपस में बराबर होंगे

( ७ ) निधि की तारीफ़ करो और उसकी मिसालें पहले अध्याय से दो

## साध्य ४१ प्रमेयोंपापद्य

**सा० मूल** अगर समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज एकही आधार पर और एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों तो समानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज से दूना होगा

( १२४ )

वि० सूत्र फ़र्ज करो कि समानान्तर चतुर्भुज  
अवसद और त्रिभुज यवस एकही आधार



वस पर और एकही समानान्तर रेखाओं वस और अय के  
दर्भियान हैं  
तो समानान्तर चतुर्भुज अवसद त्रिभुज यवस का दूना होगा

अं०—अस मिलाओ

उप० चूँकि त्रिभुज अवस और यवस एकही आधार  
वस पर और एकही समानान्तर रेखाओं वस और अय के  
दर्भियान हैं

इसलिये त्रिभुज अवस बराबर है त्रिभुज यवस के (सा०३७)  
लेकिन समानान्तर चतुर्भुज अवसद त्रिभुज अवस से दूना है  
क्योंकि कर्ण अस उसके दो बराबर हिस्से करता है (सा०३४)

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज अवसद त्रिभुज यवस से दूना है  
फल इसलिये अगर समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज आयोपांत  
यही साबित करना था

अनुमान—अगर समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज बराबर आधारों पर  
और एकही समानान्तर रेखाओं के दर्भियान हों तो साबित होसक्ता है  
कि समानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज से दूना होगा

टि० १ इस साध्य के विलोम “अगर समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज  
एकही आधार पर या एकही मीथ के बराबर आधारों पर हों और स-  
मानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज से दूना हो तो समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज  
एकही समानान्तर रेखाओं के दर्भियान होंगे” और “अगर समानान्तर  
चतुर्भुज और त्रिभुज एकही समानान्तर रेखाओं के दर्भियान हों और समा-  
नान्तर चतुर्भुज त्रिभुज से दूना हो तो समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज  
या तो एकही आधार पर या बराबर आधारों पर होंगे” सही हैं उनको  
साबित करो

टि० २ यह साध्य त्रिभुजों की पैसाइण की और इसलिये सब ऋजुभुज

( १२५ )

क्षेत्रों की पैमाइश की ( क्योंकि हर त्रिभुज क्षेत्र के त्रिभुज आसानी से बन सकते हैं ) बुनियाद है क्योंकि समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्र का रक्बा दर्पा-फल करने के लिये समानान्तर चतुर्भुज के आधार को उसकी चौड़ाई यानी उंचाई के साथ गुणा करते हैं इसलिये त्रिभुज का रक्बा दर्पाफल करने के लिये त्रिभुज के आधार को उसकी उंचाई से गुणा करो और गुणनफल का आधा करलो वही त्रिभुज का रक्बा होगा

### अभ्यास

( १६३ ) अगर त्रिभुज और समानान्तर चतुर्भुज एक ही समानान्तर रेखाओं के दमियान हों और त्रिभुज का आधार समानान्तर चतुर्भुज के आधार से दूना हो तो त्रिभुज समानान्तर चतुर्भुज के बराबर होगा

( १६४ ) अबसद समानान्तर चतुर्भुज है और किसी बिन्दु ग से ओ समानान्तर चतुर्भुज के अन्दर है समानान्तर चतुर्भुज के कोनों तक रेखा खींची गयी है साबित करो कि त्रिभुज अब स और स ग द मिलकर समानान्तर चतुर्भुज के आधे हैं

( १६५ ) समानान्तर चतुर्भुज अबसद के कोन द से एक रेखा बस से बिन्दु फ पर और अब व फे हुए से बिन्दु ज पर मिलती हुई खींची गयी है साबित करो कि त्रिभुज अब फ और स फ ज आपस में बराबर हैं

( १६६ ) अबसद चतुर्भुज की अब स ग द की समानान्तर है और अद के बीचोबीच के बिन्दु य से व और स तक सीधी रेखा खींची गयी है साबित करो कि त्रिभुज अब स चतुर्भुज का आधा है

( १६७ ) दिये हुए समानान्तर चतुर्भुज के बराबर बिषमकोन सम चतुर्भुज बनाओ

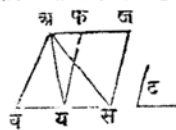
### साधन ४२ बसूपाद्य

सा० सूत्र—दिये हुए त्रिभुज के बराबर एक ऐसा समानान्तर चतु-

र्भुज बनाओ कि उसका एक कोन दिये हुए सरलकोन के बराबर हो

वि० सूत्र—कर्ण करो कि अब स दिया हुआ त्रि-

भुज और द दिया हुआ सरलकोन है



अब स के बराबर एक ऐसा समानान्तर चतुर्भुज बनाया है कि जिसका एक कोन द कोन के बराबर हो

अ०—व स के बिन्दु य पर दो बराबर हिस्से करो

और अ य मिलाओ

( १२६ )

यस के दिंदु य पर कोन स य फ बराबर द के बनाओ (सा० २३)

स से स ज समानान्तर य फ की खींचो और अ से अ फ ज  
समानान्तर यस की और य फ की बिंदु फ पर और स ज की बिं-  
दु ज पर काटती हुई खींचो

सा० ३१

तो स य फ ज समानान्तर चतुर्भुज है

प० अ

उप० चूंकि त्रिभुज अब य और अ य स बराबर आधारों य व और  
र य स पर और एकही समानान्तर रेखाओं व स और अ ज के द-  
र्मियान हैं

इसलिये त्रिभुज अब य और अ य स बराबर आधारों य व  
और य स पर और एकही समानांतर रेखाओं व स और अ ज के  
दर्मियान हैं

इस लिये त्रिभुज अब य और अ य स आपस में  
बराबर हैं

सा० ३८

इसलिये त्रिभुज अब स त्रिभुज अ य स का दूना है

लेकिन समानांतर चतुर्भुज स य फ ज भी त्रिभुज अ य स का  
दूना है क्योंकि समानांतर चतुर्भुज और त्रिभुज एकही आधार  
य स पर और एकही समानांतर रेखाओं य स और अ ज के द-  
र्मियान हैं

सा० ४१

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज स य फ ज त्रिभुज अब स के  
बराबर है और उस का एक कोन स य फ दिये हुए कोन द के  
बराबर है

इसलिये दिये हुए त्रिभुज अब स के बराबर एक ऐसा सम-  
ानांतर चतुर्भुज स य फ ज बन गया कि उसका एक कोन स य फ  
बराबर है दिये हुए कोन द के और ऐसीही समानांतर चतुर्भुज के  
बनाने की ज़रूरत थी

टि० १ जिस तरह दिये हुए त्रिभुज के बराबर समानांतर चतुर्भुज  
बनाया गया है जिसका एक कोन दिये हुए कोन के बराबर है उसी तरह

( १२७ )

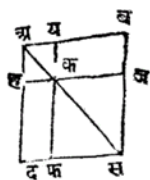
दिये हुए समानांतर चतुर्भुज के बराबर ऐसा त्रिभुज बना सकते हैं कि उसका एक कोन दिये हुए कोन के बराबर हो

टि० २ साध्या ४२ उस तरीके की पहली मंजिल है जिसके जरिये से हम इस बात को कायम करते हैं कि हर ऋजुभुज क्षेत्र को रकवे के बराबर एक वर्ग दर्याफ्त हो सकता है बाकी मंजिलें पहले अध्याय की साध्या ४४ और ४५ और दूसरे अध्याय की साध्या १४ में दी हुई हैं

### साध्य ४३ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र पूरक उन समानांतर चतुर्भुजों के जो किसी समा-  
नांतर चतुर्भुज के कर्ण के गिर्द बाँटे हैं आपस में बराबर होते हैं

वि० सूत्र फर्ज करो कि अब सद समानांतर चतुर्भुज है जि  
सका कर्ण अस है और यह और फज वह समानान्तर चतुर्भुज  
हैं जो उसके गिर्द हैं यानी जिनमें होकर अस कर्ण गुजरता है  
और बक और कद और समानांतर चतुर्भुज  
हैं जो अब सद क्षेत्र को पूरा करते हैं और  
इसलिये जिनका नाम पूरक है



तो पूरक बक बराबर होगा पूरक कद के

उप० चूंकि अब सद समानांतर चतुर्भुज है और अस उसका  
कर्ण है

इसलिये त्रिभुज अब स बराबर त्रिभुज अद स के है (सा० ३४)

फिर चूंकि अय कह समानान्तर चतुर्भुज है और अक  
उसका कर्ण है इसलिये त्रिभुज अय क बराबर है त्रिभुज  
अह क के

सा० ३४

और इसी तरह साबित हो सकता है कि त्रिभुज कज स बरा-  
बर है त्रिभुज कफ स के

इसलिये दो त्रिभुज अय क और कज स बराबर हैं दो त्रिभुज  
अह क और कफ स के

ख० २

लेकिन कुल त्रिभुज अब स बराबर है कुल त्रिभुज अद स के  
इसलिये बाकी पूरक बक बराबर है बाकी पूरक कद के (ख० ३)

( १२८ )

**फल** इसलिये पूरक उन समानांतरचतुर्भुजों के आद्योपांत यही सावित करना था

## अभ्यास

(१६८) तैत्तिरीयसूत्रों साध्य में वाकित करो कि वसानान्तर चतुर्भुज व फल वरान्तर है वसानान्तर चतुर्भुज ह्रस्व के

(१६६) तैत्तिरीयसूत्रीं साध्यं नैव यद्वा, बद्धं और जप्यं रेखा खींची  
वांछती यद्वा तीनों कर्ण आपस में समानांतर हों।

(१७०) समाप्तान्तर चतुर्भुज अथवा सप्त में किन्तु ग से दो सीधी रेखा समा-  
न्तर चतुर्भुज की भुजों की समाप्तान्तर रेखाएँ मानी हैं और समाप्तान्तर  
चतुर्भुज ग व और सप्त व्यापन में बराबर हैं सावित करी कि किन्तु ग  
कर्य अथ में है

ਸਾਹਿਬ ॥ ੨ ॥ ਅੰਮ੍ਰਿਤਸਰਾਇ

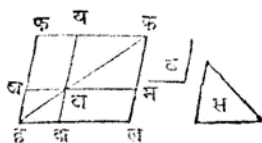
सा. सूत्र दो ऊर्ध्व सीधी रेखा पर एक द्विध्रुव बिन्दु के बराबर ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाओ कि उसका एक कोन द्विध्रुव के सरलकोन के बराबर हो।

निःसूत्र फर्ज करो जिअ बदी जूई रोधी रेखा और स  
दिया जुआ विभज और दिया जुआ सरल कीन है

सोधी रेखाओं पर बिजुल की बराबर ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाना है कि उसका एक कोण बराबर ही कोण  $\alpha$  के

श्रृं०— विभुजस के बराबर ऐसा

समानांतर चतुर्भुज वृत्तफलक बना-



श्री कि उसका कौन ध ध ज कौन द्व के बराबर हो (सा० ४२)

और उस समानांतर चतुर्भुज इस तरह बँधे कि वृत्त और  
यह एक ही सीधी रेखा में हों।

अ से अह समानांतर व ज या य फ़ की खींची सा० ३२

फ की जह तक बढाओ और बहु मिलाओ

चूँकि सीधी रेखा हफ़ की खोजों के लिए सीधी रेखाओं में ही और  
यह हफ़ पर गिरती है



( १२८ )

इसलिये कीन अ ह फ और ह फ य मिलकर बराबर दी

समकीन के हैं

सा० २८

इसलिये कीन व ह फ और ह फ य मिलकर दी समकीन से कम है

लेकिन जो दी सीधी रेखा एक और सीधी रेखा के साथ उसकी एकही तरफ में ऐसे दी कीन बनाती हैं कि वह मिलकर दी समकीन से कम हैं तो वह दोनों सीधी रेखा बढाई जाने से मिल जायंगी

स्व० १२

इसलिये ह व और फ य बढायी जाने से मिल जायंगी

फर्ज करो कि वह बढाई जाने से बिन्दु क पर मिलती हैं

क से क ल समानांतर थे अ या फ ह की खींची सा० ३१

और ह अ और ज व की इतना बढाओ कि वह क ल से ल और म बिन्दुओं पर मिलें

उप० तो ह ल क फ समानांतर चतुर्भुज है जिसका कर्ण ह क है और समानांतर चतुर्भुज अ ज और म य कर्ण ह क के गिरे हैं और ल व और व फ उनके पूरक हैं

इसलिये पूरक ल व बराबर है पूरक व फ के सा० ४३

लेकिन व फ त्रिभुज स के बराबर बनाया गया है

इसलिये ल व त्रिभुज स के बराबर है स्व० १

और चूंकि कीन ज व य कीन अ व म के बराबर है सा० १५

और कीन ज व य बराबर कीन द के बनाया गया है

इसलिये कीन अ व म बराबर है कीन द के स्व० १

इसलिये दी हुई सीधी रेखा अ व पर दिये हुए त्रिभुज स के बराबर ऐसा समानांतर चतुर्भुज ल व बन गया जिसका कीन अ व स दिये हुए कीन द के बराबर है इसी समानांतर चतुर्भुज के बनाने की जरूरत थी

( १३० )

अनुमान इस साध्य से साफ़ जाहिर है कि किस तरह दी हुई भीधी रेखा पर दिये हुए त्रिभुज के बराबर आयत बनाया जाता है

टि० इस साध्य में उक्त इस ने यह नहीं साधित किया है कि अह और फ़ज मिलेंगे यह बात आसानीसे साधित होसकी है विलियमसिमसनसाहब ने इस साध्य का इस तरह बनाना तर्जवीज किया है कि जह बराबर अय के बनाओ और अह मिलाओ तो तीरीसयी साध्य से अह समानांतर बल की होगी

### अभ्यास

( १७१ ) दी हुई रेखा पर दिये हुए समानांतर चतुर्भुज के बराबर ऐसा त्रिभुज बनाओ जिसका एक कोन दिये हुए कोन के बराबर हो

### साध्य १५ वस्तूपपाद्य

सा० सूत्र—दिये हुए ऋजुभुज क्षेत्रके बराबर समानान्तर चतुर्भुज बनाओ कि उसका एक कोन दिये हुए सरलकोन के बराबर हो

बि० सू० फ़र्ज करो कि अब स द दिया हुआ ऋजुभुज क्षेत्र और य दिया हुआ सरलकोन है

अब स द के बराबर एक ऐसा समानाकार चतुर्भुज बनाना है कि उसका एक कोन बराबर हो य के

अ०—अद मिलाओ

त्रिभुज अदब के बराबर समानाकार

चतुर्भुज फ़ह बनाओ जिसका कोन

फ़कह बराबर कोन य के हो

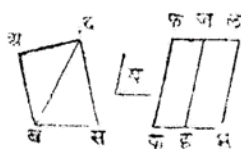
सा ४२

और सीधी रेखा जह पर त्रिभुज अदस के बराबर समानांतर चतुर्भुज जस बनाओ जिसका कोन जह म बराबर कोन य के हो

सा० ४४

तो फ़क म ल क्षेत्र समानांतर चतुर्भुज होगी और वह बराबर अब स द के होगी और उसका एक कोन बराबर कोन य के होगा

उप० चूंकि कोन फ़कह और जह म में से हर एक कोन य के बराबर है



( १३१ )

इसलिये कीन फ क ह कीन ज ह म के बराबर है (ख० १)

इन बराबरों में से हर एक में कीन क ह ज मिलाओ

इसलिये कीन फ क ह और क ह ज बराबर हैं कीन

क ह ज और ज ह म के

ख० २

लेकिन कीन फ क ह और क ह ज मिलकर बराबर दो

समकीन के हैं

सा० २८

इसलिये कीन क ह ज और ज ह म भी मिलकर बराबर

हैं दो समकीन के

चूंकि सीधी रेखा ज ह के बिन्दु ह पर दो सीधी रेखा

क ह और म ह उसकी आगने सामने की तरफों से आकर ऐसे दो आसन्न कीन पैदा करती हैं कि वह मिलकर बराबर दो सम-कीन के हैं

इसलिये क ह और ह म एकही सीधी रेखा में हैं सा० १४

और चूंकि सीधी रेखा ह ज दो समानांतर रेखाओं क म

और फ ज पर गिरती है

इसलिये कीन म ह ज बराबर है एकांतर कीन ह ज फ

के

सा० २८

इन बराबरों में से हर एक में कीन ह ज ल मिलाओ

इसलिये कीन म ह ज और ह ज ल बराबर हैं कीन

ह ज ल और ह ज फ के

ख० २

लेकिन कीन म ह ज और ह ज ल मिलकर बराबर दो समकी-

न के हैं

सा० २८

इसलिये कीन ह ज ल और ह ज फ भी मिलकर बराबर दो

समकीन के हैं

ख० १

इसलिये फ ज और ज ल एकही सीधी रेखा में हैं सा० १४

और चूंकि क फ समानांतर है ह ज की और ह ज समानांतर

है म ल की

इसलिये क फ समानांतर है म ल की

सा० ३०

और फ ल समानांतर क म की सावित हो चुकी है

( १३२ )

इसलिये **क क ल म** समानांतर चतुर्भुज है

और चूंकि समानांतर चतुर्भुज **ह फ** बराबर त्रिभुज **अ व द** के और समानांतर चतुर्भुज **ज म** बराबर त्रिभुज **व द स** के बनाये गये हैं

इसलिये कुल समानांतर चतुर्भुज **क फ ल म** बराबर हुआ कुल ऋजुभुज क्षेत्र **अ व स द** के

इसलिये दिये हुए ऋजुभुज क्षेत्र **अ व स द** के बराबर समानांतर चतुर्भुज **क ल** बन गया जिसका कोन **क क म** बराबर दिये हुए कोन **अ** के है इसी समानांतर चतुर्भुज के बनाने की ज़रूरत थी

अनुमान इस साध्यसे साफ़ ज़ाहिर है कि दी हुई सीधी रेखा पर दिये हुए ऋजुभुज क्षेत्र की बराबर एक समानांतर चतुर्भुज जिसका एक कोन दिये हुए कोन की बराबर हो इस तरह बनसکتा है कि पहले दी हुई रेखा पर चवालीसवीं साध्या की मददसे त्रिभुज **अ व द** के बराबर समानांतर चतुर्भुज बनाओ जिसका एक कोन दिये हुए कोन के बराबर हो

टि० यह साधा चार भुज के ऋजुभुज क्षेत्र की मूरतमें हल की गई है जब ऋजुभुज क्षेत्रमें चार से अधिक भुज होतीं भी उस ऋजुभुज क्षेत्र को उस के किसी कोन से सामने के कोन तक सीधी रेखा खींचकर त्रिभुजोंमें बांटे और फिर रेखा लम्ब पर तीसरे त्रिभुज के बराबर एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज बनाओ जिसका एक कोन बिन्दु **म** पर कोन **अ** के बराबर हो और इसी तरह सब त्रिभुजों के बराबर जिनमें ऋजुभुज क्षेत्र बांटा गया है समानांतर चतुर्भुज बनाओ

## अभ्यास

(१७२) दो या त्रिधाता ऋजुभुज क्षेत्रों के योग के बराबर एक आयत बनाओ  
(१७३) दो ऋजुभुज क्षेत्रों के योग के बराबर एक समकोण समानांतर चतुर्भुज बनाओ

## साध्य २६ वस्तुपपाद्य

सा० सू० दी हुई सीधी रेखा पर एक वर्ग क्षेत्र बनाओ

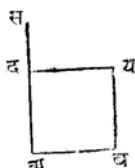
वि० सू० पार्ज करो कि **अ व** दी हुई सीधी रेखा है इस पर एक वर्ग बनाना है

( १३३ )

**अं०** अ से सीधी रेखा **अ स** सीधी रेखा **अ व** के साथ  
समकोन बनाती हुई खींची सा० ११

**अद** बराबर **अ व** के बनाओ

बिन्दु से **द य** समानान्तर **अ व** की ओर बिंदु  
**व** से **द य** समानान्तर **अ द** की **द य** से बिंदु **य** पर  
मिलती हुई खींची सा० ३१



**उप०** चूंकि **अ व य द** समानान्तर चतुर्भुज हुआ

इसलिये इस की भुज **अ व** बराबर है भुज **द य** के और भुज  
**अ द** बराबर है भुज **द य** के सा० ३४

लेकिन **अ द** बराबर **अ व** के बनाई गई है

इसलिये चारों भुज **अ व, व य, य द** और **द अ** आपस  
में बराबर हैं स्वा० १

और समानान्तर चतुर्भुज **अ व य द** समबाहु है

उस के सब कोन भी समकोन हैं

चूंकि **अ द** दो समानान्तर रेखाओं **अ व** और **द य** पर  
गिरती है

इसलिये कोन **व अ द** और **अ द य** मिलकर बराबर दो  
समकोन के हैं सा० २८

लेकिन कोन **व अ द** समकोन बनाया गया है

इसलिये कोन **अ द य** भी समकोन है

लेकिन समानान्तर चतुर्भुज के आमने सामने के कोन आपस  
में बराबर होते हैं सा० ३४

इसलिये सामने के कोनों **अ व य** और **व य द** में से हर  
एक समकोन है

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज **अ व य द** समकोन समाना-  
न्तर चतुर्भुज है

और यह साबित हो चुका है कि वह समबाहु भी है

इसलिये **अ व य द** वर्गक्षेत्र है और वह दो हुई सीधी रेखा  
**अ व** पर बना है और इसी के बनाने की ज़रूरत थी

( १३४ )

अनुमान इस साधनके सूत्रसे साफ़ ज़ाहिर होता है कि जिस समानांतर चतुर्भुज का एक कोन समकोण है उसके सब कोने समकोण हैं

### अभ्यास

( १७४ ) अगर किसी त्रिभुज अ व स की भुजाओं अ और व स पर वर्गक्षेत्र अ स द य और व स फ ह बनाये जावें तो साबित करो कि अफ और व द आपसमें बराबर हैं

( १७५ ) समानान्तर चतुर्भुज जो किसी वर्गके कर्ण के गिर्दे होते हैं वर्ग होते हैं

( १७६ ) अगर वर्गक्षेत्रकी हर एक भुजा में एक २ बिन्दु कौनसे बराबर दूरी पर तरतीबवार लिया जाय और इन बिन्दुओंके र्दमियान तरतीबवार रेखा खींची जावें तो क्षेत्र जो इन रेखाओंसे बनेगा वर्गक्षेत्र होगा और इस नये वर्गक्षेत्रका क्षेत्रफल असल वर्गक्षेत्रके क्षेत्रफलसे छोटा होता जायगा जिस कदर कि बिन्दुओंकी दूरी कौनों से बढ़ती जायगी यहाँ तक कि यह दूरी वर्गक्षेत्रकी भुजाकी आधी हो और उस सूरतमें नये वर्गक्षेत्रका क्षेत्रफल सबसे छोटा होगा

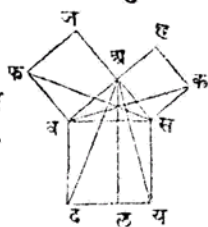
( १७७ ) एक वर्गक्षेत्र को ऐसे पाँच बराबर हिस्सों में तकसीम करो कि जिनमेंसे चार समकोण त्रिभुज हों और एक वर्ग हो

### साध्य २७ प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र हर समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा पर जो वर्ग बनाया जाता है वह बराबर होता है उन वर्गक्षेत्रों के जो समकोण बनाने वाली भुजा पर बनाये जाते हैं

वि० सूत्र फ़र्ज़ करो कि अवस समकोण त्रिभुज है जिसका कोन अ समकोण है

तो वर्गक्षेत्र जो व स पर बनाया जायगा वह बराबर होगा उन वर्गक्षेत्रों के जो भुजा व अ और अ स पर बनाये जायंगे



अ०-व स पर वर्ग क्षेत्र व द य स और व अ और अ स पर वर्ग क्षेत्र ज व और ह स बनाओ

सा० ४६

अ से अ ल समानान्तर व द या य स की खींची सा० ३१

और अ द और फ स मिलाओ



( १३५ )

उप० चूंकि कोन व अ स समकोन है ( फर्क ) और कोन व अ ज समकोन है प०३०

दो सीधी रेखा अ स और अ ज सीधी रेखा अ व के आग्ने सामने की तर्फी से आकर बिंदु अ पर मिलती हैं और उस रेखा के साथ उस बिन्दु पर आसन्न कोन बराबरदो समकोन के बनाती हैं

इसलिये स अ और अ ज एक ही सीधी रेखा में हैं सा०१४ इसीतरह यह साबित होसक्ता है कि व अ और अ व एक ही सीधी रेखा में हैं

चूंकि कोन द व स बराबर है कोन फ व अ के क्योंकि हर एक समकोन है स्व०११

इन बराबरों में से हर एक में कोन अ व स मिलाओ

इसलिये कुल कोन द व अ बराबर है कुल कोन फ व स के (स्व०२)

चूंकि त्रिभुज अ व द और फ व स की दो भुज अ व और व द अलग २ बराबर हैं दो भुजों फ व और व स के

और कोन अ व द बराबर है कोन फ व स के

इसलिये त्रिभुज अ व द बराबर है त्रिभुज फ व स के सा०४

अवसमानांतर चतुर्भुज व ल त्रिभुज अ व द से दूना है क्योंकि समानांतर चतुर्भुज और त्रिभुज एक ही आधार व द पर और एक ही समानांतर रेखाओं व द और ज ल के दर्शियान हैं

सा०४१

और वर्ग क्षेत्र ज व त्रिभुज फ व स से दूना है क्योंकि बगच्चैत्र और त्रिभुज एक ही आधार फ व पर और एक ही समानांतर रेखाओं फ व और ज स के दर्शियान हैं

सा०४१

लेकिन जो चीजें बराबर चीजों की दूनी होती हैं वह आपस में बराबर होती हैं स्व०६

इसलिये समानांतर चतुर्भुज व ल बराबर है वर्ग क्षेत्र ज व के इसीतरह अ य और व क मिलाने से यह साबित होसक्ता है

( १३६ )

कि समानांतर चतुर्भुज स ल बराबर है वर्गक्षेत्र ह स के

इसलिये कुल वर्गक्षेत्र व द य स बराबर है दो वर्गक्षेत्रों ज व और ह स के

स्व० २

और वर्गक्षेत्र व द य स भुज व स पर बनाया गया है और वर्गक्षेत्र ज व और ह स भुजों अ व और अ स पर बनाये गये हैं

**फल** इसलिये हर समकोन त्रिभुज में समकोन के सामने की आद्योपांत-यही साबित करना था

टि० १ यह माध्य उस माध्य की जो द्वितीयवीं माध्य के अभ्यास नम्बरी १३७ में दी गई है सिर्फ एक खास सूरत है

टि० २ इस माध्य की उक्तै इस ने सिर्फ एक सूरत बनायी है लेकिन इसकी आठ सूरतें बन सकती हैं

१ तीनों वर्गक्षेत्र वय, वज और सह त्रिभुज अवस के बाहर की तरफ बनाये जावें

२ तीनों वर्गक्षेत्र वय, वज और सह त्रिभुज अवस के भीतर की तरफ बनाये जावें

३ वर्गक्षेत्र वय भीतर की तरफ बनाया जाय और वर्गक्षेत्र वज और सह बाहर की तरफ बनाये जावें

४ वर्गक्षेत्र वय बाहर की तरफ बनाया जाय और वर्गक्षेत्र वज और सह भीतर की तरफ बनाये जावें

५ वर्गक्षेत्र वज भीतर की तरफ बनाया जाय और वर्गक्षेत्र वय और सह बाहर की तरफ बनाये जावें

६ वर्गक्षेत्र वज बाहर की तरफ बनाया जाय और वर्गक्षेत्र वय और सह भीतर की तरफ बनाये जावें

७ वर्गक्षेत्र सह भीतर की तरफ बनाया जाय और वर्गक्षेत्र वय और वज बाहर की तरफ बनाये जाय

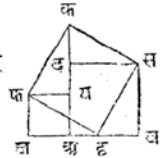
८ वर्गक्षेत्र सह बाहर की तरफ बनाया जाय और वर्गक्षेत्र वय और वज भीतर की तरफ बनाये जाय

इन सूरतों में उक्तै इस का सुबुत लगसक्ता है सिर्फ इतना याद रखना चाहिये कि उन में से बाज सूरतों में त्रिभुजों अवद और वफस या त्रिभुजों असय और कसव की बराबरी वजाय इस माध्य की चौथी माध्य के उस नतीजे की मदद से जो हमने अड़तीसवीं माध्य के टिप्पण दो में लिखा है साबित होती है

( १३० )

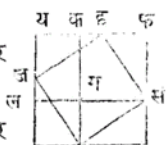
टि० ३ इस मण्डल साध्य का ईजाद करने वाला हकीम फीमागोरम मण्डल है रेखागणितज्ञों ने इस साध्य को तरह-२ से साधित किया है नीचे लिखे दो विधायन उमदा सुतबू हैं

अव्यक्त सुवृत्त फर्ज करो कि अवसद और अवफज दो वर्गक्षेत्र हैं और वह इस तरह रचने गये हैं कि उन के आधार एकही सीधी रेखा में हैं जह और यक में से हर एक को बराबर अक्ष के बनाओ हस, सक, कफ और फह को मिलाओ तो यह साधित होजता है कि त्रिभुज हबज सब तरह बराबर है त्रिभुज फयज के और त्रिभुज फजह बराबर त्रिभुज कदस के है



इसलिये वर्गक्षेत्र अवसद और अवफज का रकबा मिलाकर बराबर है क्षेत्र सकफह के यह भी इस अध्याय की बत्तीसवीं साध्य से साधित हो सक्ता है कि क्षेत्र सकफह वर्गक्षेत्र है और भुज सह उग समकोन त्रिभुज का कार्य है जिस की भुज वस और वह दिये हुए वर्गक्षेत्र की भुजों के बराबर है इस सुवृत्त में बत्तीसवीं साध्य के आगे की साध्यों में से किसी साध्य का काम नहीं पड़ता है और इस से यह भी जाना जाता है कि हम दो वर्गक्षेत्रों को किस तरह कटें कि उन के सब टुकड़े मिलकर तीसरा वर्गक्षेत्र बन जाय

दूसरा सुवृत्त फर्ज करो कि अवस एक समकोन त्रिभुज है जिसका कोन व अक्ष समकोन है अब को द तक इतना बढ़ाया कि बह बराबर होअस के और अद पर वर्गक्षेत्र अ व बनाओ और यज और फह में से हर एक बराबर अस के बनाओ और यज और जह और हस मिलाओ और बक समानान्तर अफ की और सल समानान्तर अद की खोचो सा० ३१



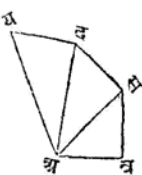
चूंकि चार त्रिभुज अबस, दजव, यहज और फसह सब तरह आपस में बराबर हैं (सा ४) इसलिये भुज सब, बज, जह और हस आपस में बराबर हैं और इसलिये चतुर्भुज वसहज समबाहु है और समकोन चतुर्भुज भी है (सा० १३ व ३२) इसलिये बराहज वर्गक्षेत्र वस पर का है

अब चूंकि अ व बराबर है चार त्रिभुज अबस, दजव, यहज और फसह के और वर्गक्षेत्र वसहज के योग के और दूसरे बराबर है दो आयतों अम और मय और जिनमें सकफस और वदलस के जो भुजों व अ और अ स पर के वर्गक्षेत्रों के बराबर हैं और चार त्रिभुज अबस, दजव, यहज और फहस मिलाकर बराबर हैं दो आयतों अम और मय के इसलिये क्षेत्र वसहज जो वस पर का वर्गक्षेत्र है बराबर है द अ और अस पर के वर्गक्षेत्रों के (सा० ३)

टि० ४ हम इस साध्य की मदद से ( १ और ) २ और ) ३ वगैरह जगहों को दया फल कर सकते हैं

( १३८ )

अब बराबर एक गज के जो और व स रेखा अब के साथ समकोण बनाती हुई और उस के बराबर खींचो और अ स मिलाओ और स द बराबर एक गज के और अ स के साथ समकोण बनाती हुई खींचो और अ द मिलाओ और द य बराबर एक गज के और अ द के साथ समकोण बनाती हुई खींचो और अ य मिलाओ



तो सैंतालीसवीं साध से साबित होसकता है कि अब बराबर है १ गज के और अ स बराबर है २ गज के और अ द बराबर है २ गज के और अ य बराबर है ४ गज के

### अभ्यास

(१७८) ४७ वीं साध में साबित करो कि अ द और स फ एक दूसरे पर लम्ब है

(१७९) सैंतालीसवीं साध में अगर ज ह, फ द और क य मिलाई जाय तो साबित करो कि त्रिभुज ज अ ह, फ द और क स य में से हर एक बराबर है त्रिभुज व अ स के

(१८०) ४७ वीं साध में अगर फ द और क य मिलाये जाय तो साबित करो कि फ द पर का वर्ग बराबर है अ व पर के वर्ग के चौगुने और अ स पर के वर्ग के योग के और क य पर का वर्ग बराबर है अ स पर के वर्ग के चौगुने और अ व पर के वर्ग के योग के और फ द और क य पर के वर्ग मिलकर द स पर के वर्ग के पाँचगुने के बराबर हैं

(१८१) किसी दो या ज़्यादा दिये हुए वर्गक्षेत्रों की बराबर एक वर्ग क्षेत्र बनाओ

(१८२) एक ऐसा वर्गक्षेत्र बनाओ जो दिये हुए वर्गक्षेत्रों के फर्क के बराबर हो

(१८३) त्रिभुज में न्यूनकोण बनाने वाली भुजों पर के वर्ग मिलकर उस कोण की सामने वाली भुज पर के वर्ग से बड़े होंगे

(१८४) त्रिभुज में अधिक कोण बनाने वाली भुजों पर के वर्ग मिलकर छोटे होंगे उस कोण के सामने वाली भुज पर के वर्ग से

(१८५) अगर त्रिभुज की दो भुजों पर के वर्ग मिलकर तीसरी भुज पर के वर्ग से बड़े हों तो तीसरी भुज के सामने का कोण न्यून कोण होगा और अगर छोटे हों तो अधिक कोण होगा

(१८६) त्रिभुज अब स के कोण स से उस की सामने की भुज अब पर लंब स द गिराया गया है साबित करो कि उन वर्ग क्षेत्रों का फर्क जो अ स और व स पर बनाये गये हैं बराबर होगा उन वर्ग क्षेत्रों के फर्क के

( १३६ )

जो अ द और व द पर बनाये जायंगे और वे वर्गक्षेत्र जो अ स और व द पर बनाये जायंगे मिलकर बराबर होंगे उन वर्गक्षेत्रों के जो व स और अ द पर बनाये जायंगे

( १८७ ) अगर किसी न बिंदु से न द और न व और न फ लम्ब अवस विभुज के अ व और व स और स अ भुजों पर तर्तीव वार खींचे जाय तो साबित करो कि  $(अ द - द व) + (व य - य स) + (स फ - फ अ) = ०$

( १८८ ) अगर किसी बिन्दु से किसी ऋजुभुजक्षेत्र के भुजों पर उनके दो दो हिस्से करते हुए खींचे जाय और हिस्से भुजों के एक ही तरफ से तर्तीव वार फुमार किये जाय तो पहली और दूसरी और पाँचवे वर्गक्षेत्र हिस्सों पर के वर्गों का योग बराबर होगा दूसरे और चारों ओर दूरे वर्गक्षेत्रों पर के वर्गों का योग के

( १८९ ) किसी त्रिभुज का आधार और उसके भुजों पर के वर्गों का समान्तर मापन है उस त्रिभुज के शीर्ष के निम्न वर्गक्षेत्रों के

( १९० ) व अ स त्रिभुज का अ कोन समकोण है और रेखा द य इसको अ व और अ स को द और व बिन्दुओं पर काटती है तो साबित करो कि व य और स द पर के वर्ग मिलकर व स और व द पर के वर्ग के बराबर होंगे

( १९१ ) समतुल्य त्रिभुज के किसी भुज पर के वर्ग के त्रिगुण परावर्त होता है उस त्रिभुज पर के वर्ग के चौगुने के जो भुजों के बराबर के कोन है उस भुज पर खींचा गया है

( १९२ ) अगर किसी बिंदु ग से किसी आधार अ व स द के किसी एक रेखा खींची जाय तो ग अ और ग स पर के वर्ग मिलकर बराबर होंगे ग व और ग द पर के वर्गों के

( १९३ ) अगर समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुज ऐसी हों कि एक का वर्ग दूसरी पर के वर्ग से त्रिगुना हो और समकोण से ऐसी दो रेखा खींची जाय कि उनमें से एक समकोण के सामने वाली भुज पर लंब हो और दूसरी उस भुज के दो बराबर हिस्से करे तो साबित करो कि वह दोनों रेखा समकोण के तीन बराबर हिस्से करेंगी

( १९४ ) अ व स समकोण त्रिभुज है जिसका कोन अ समकोण है और कोनों व और स से भुजों अ स और अ व के बीचों बीच के बिंदुओं द और व तक रेखा खींची गयी है तो साबित करो कि व द और स य पर के वर्गों का चौगुना बराबर होगा व स पर के वर्ग के पंचगुने के

( १९५ ) अगर अ व स द वर्गक्षेत्र के व स भुज के किसी व य हिस्से पर ऐसा व य फल वर्ग बनाया जाय जिसका भुज अ व के बड़े हुए हिस्से पर हो तो साबित करो कि अ य रेखा द य काल्प जो य से अ य पर खींचा जाय दोनों वर्गों को ऐसे हिस्से में बाटेगी कि वह हिस्से इस तरह रक्खे जा सकते हैं कि सब मिलकर एक वर्ग बनायें

( १४० )

## साध्य २८ प्रमेयोपपाद्य

**सा० सू०**—अगर त्रिभुज की भुजों में से एक भुज परका वर्ग बाकी दो भुजों पर के वर्गों के बराबर हो तो कोन जो उन भुजों से बनता है समकोन होगा

**वि० सू०**—प्रज्ञा करो कि वर्ग जो त्रिभुज **अ व स** की भुज **व स** पर बनाया जाय बराबर है उन वर्गों के जो भुजों **अ व** और **अ स** पर बनाये जाय

तो कोन **द अ स** समकोन होगा

**अ०** बिंदु **अ** से **अ द** भुज **अ स** के साथ समकोन बनाती हुई खींची

सा० ११

**अ द** बराबर **अ व** के बनाओ

सा० ३

और **स द** मिलाओ

अवा० १

चूंकि **अ द** बराबर है **अ व** के



इसलिये **अ द** परका वर्ग बराबर है **अ व** परके वर्ग के

इन बराबरी में से हर एक में **अ स** परका वर्ग मिलाया

इस लिये **अ द** और **अ स** परके वर्ग मिलकर बराबर हैं **अ व**

और **अ स** परके वर्गों के

स्व० २

लेकिन **अ द** और **अ स** परके वर्ग मिलकर बराबर हैं **द स** पर-

के वर्ग के क्योंकि कोन **द अ स** समकोन है

सा० ४७

और **अ व** और **अ स** परके वर्ग मिलकर बराबर हैं **व स** परके वर्ग के

प्रज्ञा

इस लिये **द स** परका वर्ग बराबर है **द स** परके वर्ग के

स्व० १

इसलिये **द स** बराबर है **व स** के

चूंकि भुज **अ द** बराबर है भुज **अ व** के और **अ स** दोनों त्रिभुजों

**द अ स** और **व अ स** में लभ्यनिष्ठ है



( १४१ )

इसलिये दो भुज **द अ** और **अ स** अलग २ बराबर हैं दो भुजों **व अ** और **अ स** के और आधार **द स** बराबर आधार **व स** के सावित हो चुका है

इसलिये कोन **द अ स** बराबर है कोन **व अ स** के सा० ८

लेकिन कोन **द अ स** समकोन बनाया गया है

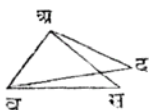
इसलिये कोन **व अ स** समकोन है

**फल**-इसलिये अगर त्रिभुज की भुजों में से एक भुज पर जो बर्ग आयीपांत यही सावित करना था-

टि० १ यह साध्य सैनालीसर्वी साध्य का विलोम है इस साध्य के सावित करने में उक्त दस ने श्रियालीसर्वी साध्य के इस नतीजे को कि बराबर रेखाओं पर के बर्ग आपस में बराबर होते हैं और उसके विलोम को मान लिया है

टि० २ उक्त दस ने पहले अध्याय में सिर्फ इसी विलोम को अन्वययुक्ति से सावित किया है इनको अतिरेकयुक्ति से इस तरह सावित करते हैं

अगर कोन **व अ स** समकोन नहीं है तो **अ द** भुज **अ व** के साथ समकोन बनाती हुई खींची और **अ द** बराबर **अ स** के बनाओ और **व द** मिलाओ



चूंकि **अ द** बराबर **अ स** के बनायी गई है इसलिये **अ द** और **अ व** पर के बर्ग मिलकर बराबर हैं **अ स** और **अ व** पर के बर्गों के लेकिन **अ द** और **अ व** पर के बर्ग मिलकर बराबर हैं **व द** पर के बर्ग के (सा० ४७) और **अ स** और **अ व** पर के बर्ग मिलकर बराबर हैं **व स** पर के बर्ग के (फल०) इसलिये **व द** पर के बर्ग बराबर है **व स** पर के बर्ग के इसलिये **व द** बराबर है **व स** के इसलिये एकही आधार **अ व** पर और उनके एकही तरफ ऐसे दो त्रिभुज **अ द व** और **अ स व** हैं कि उनकी भुज **अ द** और **अ स** जिन के सिरे आधार के एक सिरे **अ** पर हैं आपस में बराबर हैं और भुज **व द** और **व स** जिनके सिरे आधार के सिरे **व** पर हैं आपस में बराबर हैं लेकिन यह नासमकिन है (सा० ७) इसलिये **अ द** भुज **अ व** के साथ समकोन नहीं बनाती है और इसलिये कोन **व अ स** समकोन है

टि० ३ अगर किसी त्रिभुज की भुज ऐसी तीन सीधोरेखाओं से जाहिर की जायें जिनकी लम्बाइयां तर्तीव ३क, ४क, और ५क हों और क कैसी

( १४२ )

है छोटी या बड़ी राशि हो तो कोन जो उन सीधों रेखाओं से बना है  
जिनकी लम्बाइयां एक और एक हैं समकोन होगा

$$\text{क्योंकि } (३क)^२ + (४क)^२ = ९क + १६क = २५क = (५क)^२$$

आम तौर पर चूँकि

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{१}{२}(न^२+१) \right\}^२ - \left\{ \frac{१}{२}(न^२-१) \right\}^२ \\ &= \left\{ \frac{१}{२}(न^२+१) + \frac{१}{२}(न^२-१) \right\} \times \left\{ \frac{१}{२}(न^२+१) - \frac{१}{२}(न^२-१) \right\} = न^२ \\ &\therefore \left\{ \frac{१}{२}(न^२+१) \right\}^२ = न^२ + \left\{ \frac{१}{२}(न^२-१) \right\}^२ \end{aligned}$$

इसलिये न और  $\frac{१}{२}(न^२-१)$  समकोन त्रिभुज की उन भुजों को जा-  
हिर करेंगे जिनसे समकोन बनता है और  $\frac{१}{२}(न^२+१)$  उस त्रिभुज की कर्ण  
को जाहिर करेगा-समकोन त्रिभुज की भुजों के दर्याफ्त करने का यह का-  
यदा हकीम फ़ीसागोरस ने लिखा है

अगर कोई संख्या ऊनी है तो कुल भुज पूरी संख्याओं से जाहिर होगी  
फ़र्ज करो कि न=७ तो  $\frac{१}{२}(न^२-१)=२४$  और  $\frac{१}{२}(न^२+१)=२५$   
इसलिये भुज ७, २४ और २५ संख्याओं से जाहिर होंगे

$$\text{फ़िर चूँकि } \left\{ \frac{१}{२}(न^२+१) \right\}^२ = न^२ + \left\{ \frac{१}{२}(न^२-१) \right\}^२$$

$$\therefore (न^२+१)^२ = (२न)^२ + (न^२-१)^२$$

इसलिये २ न और  $(न^२-१)$  वह भुज हैं जिनसे समकोन बनता है और  
 $(न^२+१)$  कर्ण है वह कायदा हकीम अफ़लातून का दिया हुआ है ज-  
गर हम ऊपर की कायदे में न की बदले च रखें और च और ग दोनों  
को पूरी संख्या खयाल करें तो यह हासिल होता है कि

$$\begin{aligned} \left( \frac{च^२}{ग^२} + १ \right)^२ &= \left( २ \frac{च}{ग} \right)^२ + \left( \frac{च^२}{ग^२} - १ \right)^२ \text{ यागी } (च^२ + ग^२) \\ &= (२च \times ग^२) + (च^२ - ग^२) \end{aligned}$$

इसलिये २च×ग और  $(च^२ - ग^२)$  वह भुज हैं जिनसे समकोन बनता है  
और  $(च^२ + ग^२)$  कर्ण है

टि० ४ पहले अध्याय में उक्त दो रेखाओं कोनों और धरातलों के बनाने के

( १४३ )

तरीक़े और त्रिभुज की भुजों और कोनों के आपस के सम्बन्ध बयान किये हैं और त्रिभुजों और समानान्तर चतुर्भुजों का मुकाबिला इस तरह किया है कि जिससे उनका बराबर या नाबराबर होना मालूम होता है रेखागणितज्ञों ने इस अध्याय के तीन हिस्से किये हैं पहले हिस्से में पहली द्वासीस साध्या हैं जिनमें रेखा कोनों और त्रिभुजों का बनाना दिखलाया है और त्रिभुज की खासियतें बयान की हैं दूसरे में सत्ताईसवीं साध्या से लेकर चौत्तीसवीं साध्या तक हैं और उनमें समानान्तर रेखाओं की खासियतों का बयान है तीसरे हिस्से में जिसमें पैंतीसवीं साध्या से लेकर अड़तालीसवीं साध्या तक हैं खासकर त्रिभुजों और समानान्तर चतुर्भुजों के रक्तियों की बराबरी या नाबराबरी दिखलाने के लिये एकसे दूसरे का मुकाबिला किया है उक्तो इस पर लोग यह ऐतराज करते हैं कि उसने साध्योंकी तर्तीब मज़मूनके मुताबिक़ नहीं दी है इस ऐतराजके दूर करने के लिये हमने अपनी किताबके अखीरमें एक फहरिस्त लिखी है जिससे हर मज़मूनकी कुलसाध्यातर्तीबवार साफ़ २ नज़र पड़ती है

### सवालात इम्तिहान ४१ साध्य से ४८ साध्या तक

(१) साबित करो कि पहले अध्याय की ४१ वीं साध्या ऋतुभुज क्षेत्रों की पैमाइशकी जड़ है

(२) उन सब साध्यों का दावा लिखो कि जिसके ज़रिये से किसी ऋतुभुज क्षेत्र के बराबर बर्ग क्षेत्र बनाना मुमकिन है

(३) अगर ४३ वीं साध्यामें पूरक बर्ग क्षेत्र होंतो उनका कुल समानान्तर चतुर्भुज से क्या सम्बन्ध होगा

(४) क्या ४५ वीं साध्याका सबूत हर सूरत में सही है

(५) बर्ग क्षेत्र की तारीफ़ जो कुछ उसमें फ़िज़ूल या ज़ियादा हो निकाल कर बयान करो और उस तारीफ़ के दस्तज़िब किसी सीधी रेखा पर बर्ग क्षेत्र बनाने का तरीक़ा लिखो

(६) "बर्ग क्षेत्र के सब कोन मिलकर चार समकोन के बराबर होते हैं" क्या इसका बिलोम भी सही है और अगर नहीं तो वजह बयान करो

(७) ४७ वीं साध्या में यह क्यों ज़रूरी है कि एक भुज हर बर्ग क्षेत्र की जो त्रिभुज की समकोन बनावेवाली भुजों पर है त्रिभुज के दूसरे भुज की एकही सीध में हो

(८) क्या त्रिभुज जिस के भुज ३, ४, ५ हैं समकोन त्रिभुज है

(९) क्या एक आयत क्षेत्र में जिसके भुजों की लम्बाई १६० और ४६० गज है एक सीधी सड़क ५०० गज लम्बी तय्यार करा सकते हैं—इस सड़क को कागज़ पर खींचकर बताओ

( १४४ )

( १० ) ४० वीं साध्य की मदद से १ । २ । ३ गज्ज कौलम्बाई किस्तरह्  
दर्शाफ्त कर सक्ते हैं

## विवेचना और पर्या लोचना

किसी दो या ज़ियादा चीज़ों के मिलाने और उनसे एक नयी चीज़  
पैदा करने को पर्या लोचना कहते हैं मसलन् जड़ और नीलारंगमिला  
कर हम सब्ज रंग पैदा करते हैं अगर सब्ज रंग में से जड़ और नीला रंग  
चुदा २ करदे तो उस चुदा करने को विवेचना कहते हैं आम मानी विवे-  
चना और पर्या लोचना के वह हैं जो ऊपर बयान हुए लेकिन ख़ास  
मानी रेखागणित में यह हैं पर्या लोचना से यह सुराद है कि हम उन  
नियमों और नतीजों से शुरू करें जो अब तक साबित हो चुके हैं यानी  
जिनका सही और सुमक्षिण या गलत और नासुमक्षिण होना मालूम है  
और अखीर में उनसे एक नया नतीजा निकालें मसलन् प्रमेयोपपाद्य या  
वस्तुपपाद्य साध्यों की मदद से जिनको हम साबित कर चुके हैं या जिनका  
बनाना जानते हैं एक नयी साध्य प्रमेयोपपाद्य साबित करें या साध्य वस्तुप-  
पाद्य बनावें और विवेचना से यह सुराद है कि किसी नयी साध्य के साबित  
करने या बनाने के लिये हम इस बातको पहले फ़र्ज़ करलें कि वह साध्य  
साबित हो गयी या बनगयी और फिर सिलसिलेवार दलीलों की मदद से  
इस फ़र्ज़ की हुई साध्य से नये नतीजे निकालें और देखें कि यह नतीजे  
उन नतीजों में से किसी के सुताबिक हैं या नहीं जो अब तक साबित हो  
चुके हैं और इस तरह अपनी फ़र्ज़ की हुई साध्य का सही और सुमक्षिण  
या गलत और नासुमक्षिण होना दर्शाफ्त करें उल्लेख ने कुल साध्य  
पर्यालोचना के ज़रिये से साबित की हैं या बनायी हैं लेकिन विवेचना का  
ज़िन्न नहीं किया है जिसकी मदद से पुराने ज़माने के रेखागणितज्ञों ने  
बहुतसी प्रमेयोपपाद्य और वस्तुपपाद्य साध्य दर्शाफ्त की हैं चूँकि विवेचना  
का तरीका रेखागणित की साध्यों का सुबूत या अमल दर्शाफ्त करनेके लिये  
बड़ा सुफीद और कारबामद है इसलिये हम उसके कायदे और बिनाल  
नीचे लिखते हैं

विवेचना से किसी प्रमेयोपपाद्य साध्य का सुबूत दर्शाफ्त करने का कायदा

- (१) फ़र्ज़ करलो कि जो साध्य तुम्हें साबित करनी है उसका दावा सही है
- (२) फिर देखो कि उस दावे के सही फ़र्ज़ करलेने से क्या २ नतीजे  
निकलते हैं
- (३) उसके बाद दर्शाफ्त करो कि यह नतीजे उन नतीजों में से किसी के  
सुताबिक हैं या नहीं जिनका तुम सही या गलत होना अब तक साबित  
कर चुके हो
- (४) अगर उनमें से कोई नतीजा उस नतीजे के सुताबिक है जिनको तुम

( १८५ )

गुलत साबित कर चुकी हो तो साध्य का दावा भी जिसको तुमने सही फर्ज किया था गुलत है

(५) अगर यह नतीजे तुम्हारे साबित किये हुए नतीजों में से किसी के सुताधिक नहीं हैं तो उन नतीजों से और नये २ नतीजे निकालते जाओ जब तक कि वह नये नतीजे उनकी सुताधिक हों जिनका कि तुम सही या गुलत होना जानते हो

**साध्यप्रमेयोपपाद्य**—अगर समस्त विभुज अवस के आधार दस के किसी बिंदु द से लंब दय और दफ भुजों अब और अस पर गिराये जाय तो यह दो गोल लंब मिलकर बराबर होंगे इस लंब के जो आधार अस पर किसी कोन से उस कोसामने की भुज पर गिराया जायगा

**विवेचना**—फर्ज करलो कि साध्य का दावा जो तुम्हें साबित करना है सही है या गी लंब दय और दफ मिलकर बराबर हैं लंब वज के जो कोन

अवस से भुज अस पर गिराया गया है

दावे के सही फर्ज कर लेने से यह नतीजा निकला कि जब दज का कोई हिस्सा जह लंब दफ के बराबर है तो दूसरा हिस्सा वह जह लंब दय के बराबर है फिर अगर दह मिलाया गया तो इन नतीजों से एक और नतीजा निकला कि यदव और हवद ऐसे दो विभुज हैं जिन की भुज यद और हव बराबर हैं - और भुज दद दोनों विभुजों में समकोण हैं और कोन यदव और हवद आधार वस पर के बराबर कोनों अवस और असल के कोटि होने के नाब से आपस में बराबर हैं और इसलिये पहले अध्याय की चौथी साध्य से विभुज बराबर हैं और कोन दहव समकोन वयद के बराबर है और इसलिये समकोन है और समकोन सजव के बराबर है इसलिये अह इसकी साधासे दह और अ स आपस में समानान्तर हैं अब हम इस आखिर नतीजे से साध्य को पर्यालोचना के तरीके से इस तरह पर साबित करते हैं



**पर्यालोचना**—बिंदु द से दह समानान्तर अस की खींचो

चूंकि दहजफ समानान्तर चतुर्भुज है इसलिये दफ बराबर है हज के (सा३४)

चूंकि कोन दहद उन्नीसवीं साधासे समकोन सजव के बराबर है इसलिये समकोन है

इसलिये कोन वहद समकोन दयव के बराबर है

और कोन हवद और यदव भी आपस में बराबर हैं क्योंकि उनमें से हर एक समद्विबाहु विभुज के आधार पर के कोनों का कोटि है



( १४६ )

अब चूंकि त्रिभुज ह्रस्वद और यद्वय में एक त्रिभुज के दो कोण ह्रस्वद और ह्रस्वद दूसरे त्रिभुज के दो कोण बयद और यद्वय के बराबर हैं और भुज बद दोनों में समानित है

इसलिये भुज बह बराबर है भुज दय के (का० २६)

लेकिन यह साधित हो चुका है कि जह बराबर है दफ के

इसलिये दय और दफ मिलकर बराबर है दय के बराबर साधित करना या विवेचना ऐकिसी वस्तुपमाय साध्यका यद्वय दर्शाएँ करने का दूसरा

(१) याद रखो कि जकसर ऐसा होता है कि दोहरे वस्तुपमाय साध्यका बनाना कई और प्रमेयोपपाद या वस्तुपमाय साध्य पर मौजूद होती है और यह प्रमेयोपपाद या वस्तुपमाय साध्य उल्टे दम की किसी प्रमेयोपपाद या वस्तुपमाय साध्य पर मौजूद होती है

(२) जिन वस्तुपमाय साध्य को दर्शाएँ बनाना हो उन को खींचो और पूर्ण करलो कि वह दाये के सुतानिष्ठ खिंचमयी और समझी

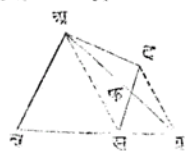
(३) फिर इन खिंची हुई साध्यकी रेखाओं और कोनों पर द के सापस के इलाके दर्शाएँ करो और देखो कि वह दर्शाएँ किये हुए इलाके उल्टे दम की किसी वस्तुपमाय या प्रमेयोपपाद साध्य के सुतानिष्ठ हैं या नहीं

(४) अगर यह इलाके तुम न दर्शाएँ कर सको तो उन खिंची हुई साध्य में और समानान्तर रेखा जालें खींचो या बिंदुओं को रेखाओं और अगर खुद करत पड़ें तो हथ भी खींचो और इस की साथ दर्शाएँ करो कि इन रेखाओं और कोनों के जो इन रेखाओं से बनते हैं और जहाँ के सापस के इलाके ब्या हैं या वह नयी रेखा और कोण बगैर पहली रेखाओं और कोनों बगैर से बना इलाके सकते हैं और फिर देखो कि वह इलाके उल्टे दम की किसी वस्तुपमाय या प्रमेयोपपाद साध्य में पाये जाते हैं या नहीं या उससे पैदा होते हैं या नहीं

(५) अगर इस कोशिश से भी तुम्हारा मतलब न निकले तो वह वसमको कि हमारी सहमत पेक्षाएँ हुई याद रखो कि जकसर ऐसा होता है कि इस कोशिश से औरगयी वस्तुपमाय या प्रमेयोपपाद साध्य दर्शाएँ हो जाती हैं

साध्यवस्तुपमाय—चतुर्भुज अवसद के बराबर सदा ऐसा त्रिभुज बनाओ कि जिस की एक भुज अब हो और दूसरी बस को दिशा पर हो

विवेचना—ऐसा त्रिभुज अवस खींचलो जिसकी एक भुज अब हो और दूसरी भुज बस की दिशा पर हो और पूर्ण करलो कि उस त्रिभुज का एकवा चतुर्भुज के रवाने के बराबर है





( १४७ )

अब हम खिंचीहुइ नाथ से और त्रिभुज अ व य को चतुर्भुज की बराबर पूज करने से यह नतीजा निकला कि त्रिभुज अ फ द बराबर है त्रिभुज स फ य के और इन त्रिभुजों के बीच अ फ द और स फ य पहले अध्याय की पंद्रहवीं नाथ से बराबर हैं लेकिन यह नतीजा बिंदु य का सुकाश दर्शाफ्त करने के लिये काफी नहीं है इसलिये अस मिलाया अस के मिलातेही नाथन हुआ कि अगर त्रिभुज अ फ स दो बराबर त्रिभुजों अ फ द और स फ य में से हर एक में मिला दिया जाय तो त्रिभुज अ द स बराहोगा त्रिभुज अ य स के और चूंकि यह बराबर त्रिभुज एकही आधार अ स पर और उस की एकही तरफ है इसलिये अगर द य मिलाई जाय तो यह समानान्तर अ स की होगी सा० १०० इसलिये बिंदु य उस जगह पर है जहां रेखा ओ समानान्तर अ स की होगी है खींचावकी है व स के नष्ट हुए हिस्से से मिलती है अतः अ य अ स के बीच अ य को पर्यालोचन के तरीके से इस तरह बनाते हैं

पर्यालोचन—अ स मिलाओ और द य बनावाओ—अ य को और व स के नष्ट हुए हिस्से से बिंदु य पर जतनी पूर्ण खींची जाय (अ य मिलाओ—तो त्रिभुज अ व य चतुर्भुज अ य स द के बराबर बन जाय और एक भुज अ स है और दूसरी भुज व स की दिशा में

चूंकि त्रिभुज अ य स और अ द स एकही आधार अ स पर हैं और समानान्तर रेखाओं अ स और द य के निर्मितवान है

इसलिये त्रिभुज अ य स बराबर है त्रिभुज अ द स के १०२७

इन बराबर त्रिभुजों में से हर एक में त्रिभुज अ स व मिलाओ

इसलिये त्रिभुज अ व य बराबर है चतुर्भुज अ व स द के—इसी त्रिभुज के बनाये की जरूरत थी

**पहली अध्यायकी नोटों पर निश्चित**

## अभ्यास

(१६६) त्रिभुज अवस के अन्दर क्या बिंदु ग है जावित करो कि ग अ ग व और ग स मिलकर त्रिभुज की सभों के बीचसे काय है

(१६७) अ और व दो वृत्तों के केन्द्र हैं और अ ग और व क उनकी मध्यान्तर आमात हैं और रेखा ग क उन की परिधों से र और स बिंदुओं पर मिलती है साधित करो कि अ र और व स समानान्तर हैं

( १४८ )

( १४८ ) समतिवाहु त्रिभुज के अन्दर एक बिंदु है उस बिंदु से जो लंब त्रिभुज की भुजों पर गिराये जायेंगे वह सब मिलकर उस लंब की बराबर होंगे जो त्रिभुज के किसी कोन से उस की सामने की भुज पर गिराया जायगा

(१४९) अगर जतुर्भुज अवसद के धरातल के कर्ण अस से दो बराबर हिस्से होते हैं तो अस से कर्ण बद्ध के भी दो बराबर हिस्से होंगे

(१५०) पहले अध्याय की पांचवीं साध्या में अगर भज नीचे की तरफ बढ़ायी जाने के बजाय शीर्ष के ऊपर की तरफ बढ़ायी जायें तो पहले अध्याय की पांचवीं साध्या का सूत्र पहली ही पांच साध्या से हांमिल हो सकता है

(१५१) रेखा द्य का सिरा द समतिवाहु त्रिभुज की भुज अव पर है और सिरा य भुज अस के बड़े हुए हिस्से पर है और त्रिभुज का आधार उस रेखा के दो बराबर हिस्से करता है साधित करो कि द्य और अय मिलकर बराबर हैं अय और अस के

(१५२) जिन समानान्तर चतुर्भुजों के कर्ण बराबर होते हैं उन में विषमकोण सम चतुर्भुज सब से बड़ा होता है

(१५३) दो बराबर रेखा अस और बद्ध समकोण बनाती हुई एक दूसरी को कहीं काटती हैं साधित करो कि चतुर्भुज अवसद उन रेखाओं में से हर एक पर के बने से आधा होगा

(१५४) दिये हुए त्रिभुज में रेखा समानान्तर चतुर्भुज बनाओ कि जिस के कर्ण एक दूसरे को दिये हुए बिंदु पर जो त्रिभुज के अन्दर है काटे

(१५५) त्रिभुज जिसका रक्वा और दो भुज सामान्य हैं बनाओ

(१५६) त्रिभुज का आधार और उस के भुजों का जोड़ और आधार पर के कोनों का अन्तर मालूम है तो उस त्रिभुज को बनाओ

(१५७) त्रिभुज का आधार और उस की दो भुजों का फर्क और आधार पर के कोनों का फर्क मालूम है उस त्रिभुज को बनाओ

(१५८) दी हुई परमिति रेखा को आधार बनाकर रेखा त्रिभुज बनाओ जिस की भुजों का फर्क मालूम है और जिसकी एक भुज दिये हुए बिंदु पर हो कर गुजरे

(१५९) एक त्रिभुज का आधार और क्षेत्रफल और उस रेखा की लम्बाई जो आधार के बीचों बीच के बिंदु से उस की सामने के कोण तक खींचा जाय मालूम है उस त्रिभुज को बनाओ

(१६०) अय और अस दी हुई रेखा हैं उन में से एक में रेखा बिन्दु ग दर्शात करो कि अगर लंब शक्त दूसरी रेखा पर गिरावे तो अय और अय मिलकर दी हुई लंबाई के बराबर हों

(१६१) त्रिभुज अवसद की भुज अव सय अस से बड़ी है और रेखा अ द

( १४८ )

जो कोन व अस के दो बराबर हिस्से करती है व स से बिंदु द पर मिलती है साबित करो कि व द बड़ी है स द से

(२१२) अगर त्रिभुज का एक कोन दूसरे से तिगुना है तो वह त्रिभुज दो समादिबाहु त्रिभुजों में बट सकता है

(२१३) अगर त्रिभुज का एक कोन दूसरे से दूना है तो उस त्रिभुज पर एक ऐसा समदिबाहु त्रिभुज जियादा कर सकते हैं कि यह दोनों त्रिभुज मिलकर एक समदिबाहु त्रिभुज बन जाय

(२१४) समदि बाहु त्रिभुज अब स की भुज अब के बीचों बीच का बिंदु द है और भुज अब आधार व स के नीचे की तरफ इतनी बढ़ायी गयी है कि व य बराबर है अब के साबित करो कि स य दूनी है स द से

(२१५) उस बिंदु की निधि दर्शाएत करो जिसकी एक दिखे हुए बिन्दु से दूरी उस की दूसरे दिखे हुए बिंदु से दूरी की दूनी हो

(२१६) रेखा अब के बीचों बीच का बिंदु स है अस और स व को कर्ण बनाकर समानान्तर चतुर्भुज अ द स य और फ व ज स बनाये गये हैं और द ह समानान्तर स फ की और फ ह समानान्तर स द की और ज क समानान्तर स य की और य क समानान्तर स ज की खींची गयी है साबित करो कि ह स और स क एकही सीध में हैं

(२१७) आयत अब स द के आसने सामने के कोन अ और स हैं बिंदु य भुज व स में और बिंदु फ भुज स द में है साबित करो कि त्रिभुज अ य फ के क्षेत्रफल का दूना और वह आयत जिस की आसन्न भुज व य और द फ की बराबर हों मिलकर बराबर होंगे आयत अब स द के

(२१८) एकही आधार व स पर दो त्रिभुज अब स और द व स हैं और त्रिभुज अब स की भुज अब भुज अस के बराबर है वृत्त जो बिंदु स और द पर होकर गुजरता है उस का केंद्र व भुज स अ पर या उस के बड़े हुए हिस्से पर है और वृत्त जो व और द बिन्दुओं पर गुजरता है उस का केंद्र फ भुज व अ पर या उस के बड़े हुए हिस्से पर है साबित करो कि चतुर्भुज

अ य द फ के दो भुज मिलकर उस की बाकी दो भुजों के बराबर हैं

(२१९) दो रेखा अ द और अस के मुकास दिखे हुए हैं अब में ऐसा बिंदु ग दर्शाएत करो कि अगर उस बिन्दु से अस पर लंब गिराया जाय तो वह लंब रेखा अ ग से बकुर ही हुई लंबाई के छोटा हो

(२२०) समान कोन व ह भुज क्षेत्र के आसने सामने के भुज समानान्तर होती हैं और उस की कोई दो आसन्न भुज मिलकर अपनी समानान्तर भुजों के बराबर होती हैं

( १५० )

( १२१ ) समकोन त्रिभुज अब स के कर्ण व स पर वर्ग ब द व स बनाया गया है उस वर्ग के कोण द से लम्ब द म त्रिभुज की भुज अ स पर गिराया गया है और कोन य से द म लंब भुज अब पर गिराया गया है साबित करो कि अ म बराबर अ द की और अ न बराबर अ स की है

( १२२ ) त्रिभुज अब स का कोन स समकोन है ऐसी रेखा खींची जो एक ही हुई रेखा के समानान्तर हो और जिसके सिरे त्रिभुज की भुजों अ स और व स पर हों और जिसके बीचोंबीच का बिन्दु अब में हो

( १२३ ) समद्विबाहु त्रिभुज अब स का कोन व आधार अ स पर के हरण-क बौनका चौगुना है अगर भुज अ व बिन्दु द तक इतनी बढ़ा दी जाय कि ब द दुनी अब की हो और स द बिनाई जाय तो त्रिभुज अस द के कोन त्रिभुज अब स के कोनों के समान २ बराबर होंगे

( १२४ ) समानान्तर चतुर्भुज अब स द के अन्दर एक बिन्दु क है उस बिन्दु से क का समानान्तर अ व की खींची गयी है और उसका मिरा क भुज अ द पर और मिरा ज भुज व स पर है और उसी बिन्दु से व क का समानान्तर अ द की खींची गयी है और उसका मिरा य भुज अ न पर और मिरा फ भुज स द पर है साबित करो कि समानान्तर चतुर्भुज क ज और य क का फ के त्रिभुज व क द का दूना है

( १२५ ) समकोन त्रिभुज जिसकी एक भुज और कर्ण और दूसरी भुज का एक मातृक है बनाओ

( १२६ ) त्रिभुज के कोनों की ओर बराबर दिसों में बाँटने वाली रेखा एक ही बिन्दु में होकर गुजरती है और वह बिन्दु त्रिभुज की भुजों से बराबर दूरी पर है

( १२७ ) किसी त्रिभुज के दो बहिः कोन और तीसरे आन्तः कोन को दो दो बराबर दिसों में बाँटती हुई रेखा एक ही बिन्दु में होकर गुजरती है

( १२८ ) त्रिभुज अब स की भुजों व स और अ स के बीचोंबीच के बिन्दु द और व है और अ द और व य एक दूसरी को बिन्दु फ पर काटती है साबित करो कि अ फ दूनी है फ द की और व फ दूनी है फ य की

( १२९ ) त्रिभुज अब स के कोनों अ, व और स से अ द, व य और स फ रेखा उन कोनों के सामने की भुजों को बिन्दु द, य और फ पर दो बराबर दिसों में बाँटती हुई खींची गयी है साबित करो कि तीनों रेखा किसी एक ही बिन्दु में होकर गुजरेंगी और त्रिभुज अज व, वज स और स ज अ व्यापकमें बराबर होंगे

( १३० ) त्रिभुज के तीनों भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं से जो रेखा

( २५१ )

उन भुजों की साथ समकोण बनाती हुई खींची जायगी वह सब एक ही बिन्दु पर मिलेगी और वह बिन्दु त्रिभुज की कोनों से बराबर दूरी पर होगा

( २३१ ) हर त्रिभुज की कोनों से जो लंब उनके सामने की भुजों पर गिराये जायंगे वह सब एक ही बिन्दु पर हीकर गुजरेंगे

( २३२ ) पक्ष से व्यास की ४० वीं साध में ज ल और द क जोर स फ एक ही बिन्दु पर हीकर गुजरेंगी

( २३३ ) त्रिभुज अ व स की भुज अल ग २ त्रिभुज द य फ की भुजों की दूनी है यानी भुज अ व, द य की और भुज ब स, य फ की और भुज ल अ भुज फ द की और त्रिभुज अ व स की भुजों की बीचोंबीच के बिन्दुओं पर उन भुजों के साथ समकोण बनाने वाली रेखा बिन्दु ज पर मिलती है और त्रिभुज द य फ की भुजों की बीचोंबीच के बिन्दुओं पर उन भुजों के साथ समकोण बनाने वाली रेखा बिन्दु ह पर मिलती है साबित करो कि ज अ दूनी है ह द की और जो लं व ज से त्रिभुज अब स की भुज अ व पर गिरा है दूना है उस लंब का जो ह से त्रिभुज द य फ की भुज द य पर है

( २३४ ) त्रिभुज अ व स के कोनों से जो लंब उन कोनों के सामने की भुजों पर गिराये जायंगे वह बिन्दु ग पर मिलते हैं और जो रेखा भुजों अ ब, ब स और स व के बीचोंबीच के बिन्दुओं द य और फ से उन भुजों के साथ समकोण बनाती हुई खींची गयी है वह बिन्दु च पर मिलती है साबित करो कि अ ग दूनी है य च की और द ग दूनी है फ च की और स ग दूनी है द य की

( २३५ ) किसी त्रिभुज की कोनों से जो लंब उनके सामने की भुजों पर गिराये गये हैं वह बिन्दु ग पर मिलते हैं और जो रेखा उन कोनों के सामने की भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं तक खींची गयी है वह बिन्दु ज पर मिलती है और जो रेखा उन भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं पर उनके साथ समकोण बनाती हुई खींची गयी है वह बिन्दु क पर मिलती है साबित करो कि बिन्दु ग, ज और क एक ही सीधी रेखा में हैं

( २३६ ) हर त्रिभुज में उन रेखाओं का योग जो त्रिभुज की भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं से उनके सामने के कोनों तक खींची जायंगे त्रिभुज की भुजों के योग से छोटा होगा और उस योग के  $\frac{1}{2}$  से बड़ा होगा

( २३७ ) एक त्रिभुज की दो भुज और वह रेखा जो तीसरे भुज के बीचोंबीच के बिन्दु से उसके सामने के कोन तक खींची गई है मालूम है उस त्रिभुज को बनाओ

( २३८ ) एक त्रिभुज का आधार और वह दो रेखा ही हुई हैं जो



( १५२ )

त्रिभुज के दो भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं से उनके सामने के कोनों तक खींची गई है उस त्रिभुज को बनाओ

( २३६ ) वह रेखा जो किसी त्रिभुज के कोनों से उनके सामने के भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं तक खींची गयी है मालम है उस त्रिभुज को बनाओ

( २४० ) अब स त्रिभुज के अ कोण से अ द लम्ब व स आधार पर डाला गया है और अ य रेखा व अ स कोण को दो बराबर हिस्सों में बांटती हुई खींची गई है साबित करो कि द अ य कोण त्रिभुज के ब और स कोणों के अन्तर का आधा है

( २४१ ) एक समानान्तर चतुर्भुज की एक भुज और दोनों कर्ण दिये हुए हैं उस समानान्तर चतुर्भुज को बनाओ

( २४२ ) समकोण त्रिभुज अब स के समकोण अ के एक रेखा दो बराबर हिस्से करती है और एक दूसरी रेखा भुज व स के बिंदु द पर दो बराबर हिस्से करती है और उसकी साथ समकोण बनाती है वह दोनों रेखा बिन्दु य पर मिलती है साबित करो कि द अ और द य आपसमें बराबर हैं

( २४३ ) अ ब और अ स एक दूसरी के साथ समकोण बनाती हैं द कोई बिन्दु अ व में है और य कोई बिन्दु अ स में है द य को कर्ण बनाकर आश्रय वर्ग जिसका शीर्ष ज है बनाया गया है साबित करो कि ज की निधि वह सीधी रेखा है जो कोण व अ स के दो बराबर हिस्से करती है

( २४४ ) वर्ग अब स द के कर्ण अ स पर वर्ग के बराबर एक ऐसा बिम्बकोण समचतुर्भुज अ य फ स बनाया गया है जिसका न्यून कोण बिन्दु अ पर है अगर अ फ मिलायी जाय तौ कोण व अ स के तीन बराबर हिस्से होजायगे

( २४५ ) समानान्तर चतुर्भुजों में जिनकी भुजों का योग एकही है वर्ग का रकबा सब से बड़ा होगा

( २४६ ) अब स त्रिभुज के अ व और व स और स अ भुजों के बीचों बीच के बिन्दु तर्तीव वार द , य और फ हैं और द से द ज जो व फ की समानान्तर खींची गई है य फ की बट्टे हुए हिस्से से ज बिन्दु पर मिलती है साबित करो कि द स ज त्रिभुज की भुज उन रेखाओं की तर्तीव वार बराबर हैं अब स त्रिभुज के भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं से उन भुजों के सामने के कोनों तक खींची जायगी

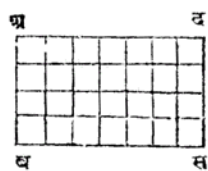
( २४७ ) दिये हुए वर्ग में ऐसा वर्ग बनाओ जिसका रकबा एक दिये हुए वर्ग के रकबे के बराबर हो और बताओ कि दिये हुए रकबे की क्या कटौत होनी चाहिये



( १६१ )

एक पैमाना घन है जिसकी हर एक सीमा सम घरातल पैमाना घरातल है जैसे रेखाओं के लिये एक फुट लम्बा पैमाना सुकरूर किया जाय तो एक बर्ग फुट घरातल के नापने के लिये और एक घन फुट पिंड के नापने के लिये सुकरूर होगा फर्ज करो कि अ व स द एक आयत क्षेत्र है जिसकी भुज अ व पूरे २ चार पैमाने है और अ द पूरे २ सात पैमाने है इसलिये

अगर अ व को चार बराबर हिस्सों में बांटे और अ द को सात बराबर हिस्सों में बांटे और अ व के भाग बिन्दुओं से अ द की समानान्तर और अ द के भाग बिन्दुओं से अ व की समानान्तर रेखा खींची जावें तो साफ़ ज़ाहिर है कि



जितने हिस्से उस आयत क्षेत्र के इन रेखाओं के खींचने से होंगे उनमें से हर एक हिस्सा एक बर्ग पैमाना है और चूंकि हर आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल जितने पैमाने उसमें होते हैं उनकी तादाद से दर्याप्त होता है इसलिये अ व स द आयत क्षेत्रका क्षेत्रफल भी उन्हीं बर्गों की तादाद से जिनमें वह समानान्तर रेखाओं के खींचने से बट गया है करार पावेगा जब हम देखते हैं कि पड़ी हुई रेखा जो अ द के समानान्तर है वह आयत क्षेत्रको चार बराबर हिस्सों में बांटती है और खड़ी रेखा जो अ व के समानान्तर है उन बराबर हिस्सों में से हर एक के सात बराबर हिस्से करती है तो कुल छोटे हिस्सों की तादाद सात का चौगुना लेने से यानी सात को चार गुना करने से मालूम होजायगी इसलिये किसी आयत क्षेत्र के बर्ग पैमानों की तादाद दर्याप्त करने के लिये हमें उन दो अंकों को व्यापस में गुणा करना चाहिये जो उन पैमानों की तादाद जो आयत की दो पास की भुजों में है ज़ाहिर करते हैं जब घरातल बर्गक्षेत्र है तो उसकी सब भुजा व्यापस में बराबर है यानी हर एक भुजा में पैमाने की तादाद एकही है इसलिये उस बर्गक्षेत्र में बर्ग पैमानों की तादाद दर्याप्त करने के लिये उस अंक को जो उसकी एकभुज के पैमाने लम्बाई की तादाद को ज़ाहिर करता है उसी अंक से गुण दो और यही सबब है कि अंकगणित में बर्ग का अर्थ उस गुणनफल का नाम है जो किसी अंक को उसीसे गुणा करने से हासिल होता है लेकिन बिद्यार्थी को याद रखना चाहिये कि रेखागणित में बर्ग का शब्द जिस अर्थ में बोला जाता है वह अर्थ अंकगणित या बीजगणित में नहीं लिया जाता वरन रेखागणित में बर्ग उसे कहते हैं जो एक रेखा पर बनाया जाय और अंकगणित व बीजगणित में बर्ग उस गुणनफल का नाम है जो एक अंक को उसी से गुण देने से हासिल होता है अगर व किसी बर्गक्षेत्र की किसी भुज के पैमाने की संख्या को ज़ाहिर करे तो व का गुणनफल जब कि उसको उसी अंक से गुणा दिया जाता है यानी व × व या व बर्गक्षेत्र के बर्ग पैमानों की तादाद को ज़ाहिर करेगा और

( १६२ )

इसी तरह पर अगर व और स किसी आयत की दो पाम की भुजों के पैमानों की तादाद को जाहिर करें तो व और स का गुणनफल यानी  $v \times s$  आयत क्षेत्र के वर्ग पैमानों की तादाद को जाहिर करेगा इसलिये मालूम हुआ कि उन तरीकों के बसीले से जो हमने ऊपर बयान किये हैं हर आयत क्षेत्र के क्षेत्रफल के परिमाणको बयान करसक्ते हैं और उसकी सब खालियतों पर जिन पर रेखागणित की रू से बहस होती है बीजगणित की रू से बहस करसक्ते हैं लेकिन जब व और स की जगह पर कोई खास मोल यानी मान २ या ३ या ४ इत्यादि रखना चाहें तो अभी २ ऐसा मालूम होता है कि दो परिमाण जिनको हम व और स से बयान करते हैं एकानपवर्त्ता राशि हैं और चूंकि ऐसी हालत में कोई समापवर्त्तक या पैमाना गो बह कैसाही छोटा लिया जाय नहीं दर्याफ्त होसक्ता जिसको बसीले से हर उस आयत की भुजों की लम्बाई वा अंदाज़ा कर सकें इसलिये इस हालत में कोई ठीक मान व और स की जगहों में नहीं काम में लासक्ते हैं और इसलिये उस आयत का क्षेत्रफल हिमाव की रू से ठीक नहीं दर्याफ्त हो सक्ता है

अब चूंकि हमने यह बात जाहिर करदी कि रेखा व धरातल वगैरे; और अंक में क्या सम्बन्ध है और क्या फर्क है इसलिये हम इस किताब में दूसरे अध्याय की उन माध्यों का जिनका सुबूत बीजगणित से हो सक्ता है बीजगणितीय साधन उनके आगे लिखेंगे

## पहली साध्यका बीजगणितीय साधन

फर्क करो कि व स रेखा की लम्बाई अ पैमाने है और अ रेखा की लम्बाई व पैमाने है और ब द, द य और य स रेखाओं की लम्बाई क्रमसे म, न और क पैमाने हैं

चूंकि कुल अपने सब हिस्सों के बराबर होता है

इसलिये  $a = m + n + k$

अगर इन बराबरों में से हरएक को व से गुणदे

तो  $a \times v = v \times (m + n + k)$

इसलिये  $a \times v = v \times m + v \times n + v \times k$

इसलिये उन दो अंकों का गुणनफल जिनमें से एक कई हिस्सों में बांटा गया है बराबर है उन गुणनफलों के योग के जो बिना टुकड़े किये अंक को टुकड़े किये अंक के हर हिस्से से गुण देने से हासिल होते हैं

यानी ( अगर इन गुणनफलों के अर्थ रेखागणित की रू से खयाल किये जावें ) वर्ग पैमानों की तादाद जो गुणनफल  $a \times v$  व से बयान होती है बराबर है उन वर्ग पैमानों की तादाद के जो  $v \times m$ ,  $v \times n$  और  $v \times k$  के गुणनफलों के योग से दर्याफ्त होती है

( १६३ )

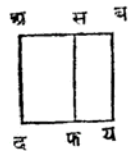
## अभ्यास

( १ ) अगर दो सीधी रेखाओं में से हर एक कई २ हिस्सों में बांटी जाय तो धरातल दो सीधी रेखाओं का बराबर होगा उन सब धरातलों के योग के जो एक रेखा के सब हिस्से जुड़े दूसरी रेखा के सब हिस्सों के साथ बनाते हैं

### साध्य २-प्रमेयोपपाद्य

**सा०सू०-**अगर कोई सीधी रेखा दो हिस्सों में बांटी जाय तो धरातल जो कुल रेखा और उसके हर हिस्से से बनते हैं मिलकर बराबर होंगे कुल रेखा परके बर्गके

**वि०सू०-**फर्ज करो कि सीधी रेखा अब किसी दो हिस्सों में स बिन्दुपर बांटी गयी है तो अब और व स का धरातल और अब और असका धरातल मिलकर बराबर होंगे अब परके बर्गके



**अं०-**अव पर अदयव बर्ग क्षेत्र बनाओ ( १ सा०४६ )

और स बिन्दु से सफ रेखा अद या वय की समानान्तर खींचो ( १ सा०३१ )

उप० अब अय क्षेत्र बराबर है अफ और सय क्षेत्रों के योगके लेकिन अय क्षेत्र अव परका बर्ग है

औरअफ धरातल है वअ और अस का क्योंकि वह दअ और अस का धरातल है जिनमें से दअ बराबर है अव के और सय क्षेत्र अव और वस का धरातल है क्योंकि वय बराबर है अव के

इसलिये अब और अस का धरातल और अव और वस का धरातल मिलकर बराबर हैं अव परके बर्ग के

**फल-**इसलिये अगर कोई सीधी रेखा आद्योपान्त- यही साबित करना था-

( १६४ )

टि०-यह साध्य इस अध्याय की पहली साध्य की एक खास छरत है पहली साध्य में अगर दोनों सीधी रेखा आपसमें बराबर हों और उनमें से एक दो हिस्सों में बांटी गयी हो तो पहली साध्य और यह साध्य एक ही जायगी

## बीजगणितीय साधन

फ़ज़ करो कि अबलम्बाई में अ पैमाने हैं और अ स और ब स में क्रमसे म और न पैमाने हैं

$$\text{तो } म + न = अ$$

इन बराबर चीज़ों में से हर एक को अ से गुण दिया

$$\text{इसलिये } अ^2 = अ \times म + अ \times न$$

यानी अगर कोई अंक दो हिस्सों में बांटा जाय तो कुल अंक और उस-के हर हिस्से का गुणनफल मिलकर बराबर होते हैं कुल अंक के वर्ग के

## अभ्यास

( २ ) किसी सीधी रेखा पर का वर्ग उस रेखा के आधे पर के वर्ग का चौगुना होता है

( ३ ) अगर अबस समकोन त्रिभुज का अ कोन समकोन है और अ द, ब सभुजपर लम्ब है सावित करो कि ब स और ब द का धरातल और ब स और स द का धरातल मिलकर बराबर हैं ब द और द स पर के वर्गों और अ द पर के दूने वर्ग के

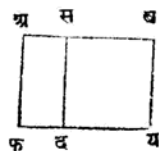
## साध्य ३-प्रमेयोपपाद्य

सा०सू० अगर कोई सीधी रेखा किसी दो हिस्सों में बांटी जाय तो धरातल जो कुल रेखा और उसके एक हिस्से से बनता है करा-बर होगा उस हिस्से पर के वर्ग और उस धरातल के योग के जो रेखा के दोनों हिस्सों से बनता है-

वि०सू० फ़ज़ करो कि अब सीधी रेखा

किसी दो हिस्सों में स बिन्दु पर बांटी गयी है

तो अब और ब स का धरातल बराबर होगा



अ स पर के वर्ग और अ स और स द के धरातल के योग के

प्र०-ब स पर स द य व वर्गक्षेत्र बन्नाओ

( १ सा० ४६ )

( १६५ )

और द य को फ तक बढ़ाकर अ बिन्दु से अ फ रेखा स द या  
ब य की समानान्तर खींचो (१सा०३१)

उप०---अब अ य आयत बराबर है अ द और स य आयतों के  
योग के

लेकिन अ य क्षेत्र अ व और व स का धरातल है क्योंकि वह  
अ व और ब य का धरातल है जिनमें से व य बराबर है व स के  
और अ द क्षेत्र अ स और स ब का धरातल है क्योंकि स द  
बराबर है स ब के और स य क्षेत्र व स परका वर्ग है

इसलिये अ व और व स का धरातल बराबर है व स पर के  
वर्ग और अ स और व स के धरातल के योग के

**फल**—इसलिये अगर कोई सीधी रेखा आद्योपान्त-यही साबित  
करना था-

टि० १- यह साध्य भी इस अध्याय की पहली साध्यकी एक खास स्वर-  
त है पहली साध्य में अगर एक सीधी रेखा दो हिस्सों में बांटी गयी है  
और उनमें से एक हिस्सा दूसरी सीधी रेखा के बराबर होतो पहली  
साध्य और यह साध्य एक होजायंगी-

टि० २- अगर दूसरी और तीसरी साध्यों में अ व और व स जुड़ी २  
रेखा खयाल की जावे तो अ स उन रेखाओं का अंतर होगा और इस-  
लिये दोनों साध्य एक ही दावे में इस तरह बयान होंगी कि दोनों रेखा-  
ओं का धरातल और उनमें से एक रेखा परके वर्ग का फर्क बराबर होगा  
उस धरातल के जो उस रेखा और दोनों रेखाओं के अन्तर से बनता है-

## बीजगणितीय साधन

फर्क करो कि अ ब लंबाई में अ पैमाने है और व स लंबाई में स और  
अ स लंबाई में न पैमाने है

तो अ = स + न

इन बराबर जीणों को स से गुण दिया

इसलिये  $स \times अ = स^2 + स \times न$

यानी अगर कोई अंक दो हिस्सों में बांटा जाय तो कुल अंक और उसके  
एक हिस्से का गुणनफल बराबर होता है उस हिस्से के वर्ग और दोनों  
हिस्सों के गुणनफल के योग के

( १६६ )

## अभ्यास

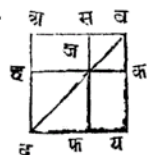
( ४ ) एक रेखा को इतना बढ़ाओ कि बड़ी हुई समेत कुल रेखा और बड़े हुए हिस्से की धरातल बराबर हो उस रेखा पर के वर्ग के दूने के

### साध्य १-प्रमेयोपपाद्य

**सा०सू०** अगर कोई सीधी रेखा किसी दो हिस्सों में बांटी जाय तो कुल रेखा पर का वर्ग बराबर होगा दोनों हिस्सों परके वर्गों और उस धरातल के दूने के योग के जो उन हिस्सों से बनता है

**वि०सू०** फर्ज करो कि अब सीधी रेखा किसी

दो हिस्सों में स बिन्दुपर बांटी गयी है तो अब



परका वर्ग बराबर होगा अ स और व स परके

वर्गों और अ स और व स के दूने धरातल के योग के

**अं०-अ** व पर अ द य व वर्गक्षेत्र बनाओ ( १सा० ४६ )

और व द को मिलाकर स बिन्दु से स ज फ रेखा अ द या व य की समानान्तर और व द से ज बिन्दुपर और द य से फ बिन्दुपर मिलती हुई खींची ( १सा० ३१ )

और ज से ह ज क रेखा अ व या द य की समानान्तर और अ द से ह बिन्दु पर और व य से क बिन्दु पर मिलती हुई खींची ( १सा० ३१ )

**उप०** अब चूंकि स फ समानान्तर है अ द की और व द उन पर गिरता है

इसलिये व ज स बहिः कोन बराबर है अपने सामने के व द अ अंतः कोन के ( १सा० २८ )

लेकिन व द अ कोन बराबर है द व अ कोन के ( १सा० ५ )

क्योंकि व अ और अ द वर्गक्षेत्र की भुजा होने के सबब आपस में बराबर हैं

इसलिये स ज व कोन बराबर है स व ज कोन के ( १स्व० १ )



( १६७ )

इसलिये **स व** भुज बराबर है **स ज** भुजके ( १ सा० ६ )

लेकिन **व स** बराबर है **ज क** के और **स ज** बराबर है **व क** के ( १ सा० ३४ )

इसलिये **व स स ज, ज क और क व** सब आपस में बराबर हैं और क्षेत्र **स ज क व** समभुज क्षेत्र है

और ऐसीही सब कोन उस के समकोन हैं

क्योंकि जब **स ज** रेखा **व क** रेखा की समानान्तर है और **व स** उन पर गिरती है **क व स** और **व स ज** कोन मिलकर दो समकोन के बराबर हैं ( १ सा० २८ )

लेकिन **क व स** समकोन है ( १ प० ३० )

इसलिये **व स ज** भी समकोन हुआ

और इसलिये **स ज क** और **ज क व** कोन भी जो उन के आमने सामने हैं समकोन हुए ( १ सा० ३४ )

इसलिये **स ज व क** समकोन चतुर्भुज है और वह समभुज पहले साबित हो चुका है इसलिये वह **व स** पर का वर्ग है

और ऐसीही दलील से **ह फ** वर्ग **ह ज** पर का है और **ह ज** बराबर **अ स** के है ( १ सा० ३४ )

इसलिये **ह फ** और **स क** वर्ग **अ स** और **स व** पर हुए

और चूंकि **अ ज** पूरक बराबर है **ज य** पूरक के ( १ सा० ४३ )

और **अ ज** पूरक **अ स** और **स व** का धरातल है क्योंकि **ज स** बराबर है **स व** के इसलिये **ज य** बराबर है **अ स** और **स व** के धरातल के

इसलिये **अ ज** और **ज य** मिलकर बराबर हैं **अ स** और **स व** के धरातल के दूने के और **ह फ** और **स क** वर्ग हैं **अ स** और **स व** पर के

इसलिये चारों क्षेत्र **ह फ, स क, अ ज** और **ज य** बराबर हैं **अ स** और **स व** पर के वर्गों और **अ स** और **स व** के दूने धरातल के योग के

( १६८ )

लेकिन ह फ, स क, अ ज और ज य मिलकर कुलचैत्र  
अद य व को जो अ व पर का वर्ग है बनाते हैं

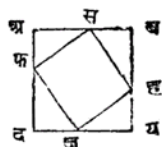
इसलिये अ व परका वर्ग बराबर हुआ अ स और स व  
परके वर्गों और अ स और स व के दूने धरातल के

**फल**—इसलिये अगर कोई सीधीरेखा आद्योपान्त-यही सावित  
करना था

**अनुमान**—इस साध्य के सुबूत से साफ़ ज़ाहिर है कि वर्ग चैत्र के  
कर्ण के गिर्द के समानान्तर चतुर्भुज भी वर्गचैत्र होते हैं

**टि०-१**—इस साध्य को इस तरह पर भी सा-  
वित करते हैं

अवपर अद य व वर्ग बनाओ और अ फ, द ज  
और य ह बराबर व स के काटो और स फ, फ ज,  
ज ह और ह स मिलाओ



चूँकि त्रिभुज अ स फ, द फ ज, य ज ह और व ह स में भुज अ फ, ज द,  
ह य और स व आपस में बराबर और भुज स अ, फ द, ज य और ह व  
आपस में बराबर हैं और कोण अ, द, य और व पर समकोण हैं इसलिये  
चारों त्रिभुज सब तरह आपस में बराबर हैं यानी आधार स फ, फ ज, ज ह  
और ह स आपस में बराबर और कोण अ स फ, द फ ज, य ज ह और व ह स  
आपस में बराबर और कोण अ फ स, द ज फ, य ह ज और व स ह  
आपस में बराबर हैं (१-सा०४) इसलिये चारों त्रिभुज मिलकर त्रिभुज  
अ स फ के चौगुने हैं यानी अ स और स व के धरातल के दूने हैं (१-सा-४१)  
का टिप्पण देखो

अब चूँकि कोण अ स फ बराबर है कोण व ह स के इसलिये कोण अ स फ  
और व स ह मिलकर बराबर हैं कोण व ह स और व स ह के लेकिन कोण  
व ह स और व स ह मिलकर एक समकोण हैं (१-सा-३२) इसलिये कोण  
अ स फ और व स ह मिलकर एक समकोण हैं और कोण फ स ह एक स-  
मकोण है (१-सा-१३) इसी तरह सावित होसक्ता है कि कोण स फ ज,  
फ ज ह और ज ह स में से हर एक समकोण है इसलिये फ स ज ह चैत्र स-  
मकोण चतुर्भुज है और उसकी भुज स फ, फ ज, ज ह और ह स आपस  
में बराबर हैं इसलिये स फ ज ह वर्ग है और बराबर है अ स और अ फ  
परके वर्गों के यानी अ स और स व परके वर्गों के (१-सा-४७) इसलिये

( १६८ )

चारों त्रिभुज अस फ, द फ ज, य ज ह और ब ह स और बर्ग स फ ज ह जो मिलकर अब परका बर्ग अ द य ब बनाते हैं बराबर हैं अस और स ब परके बर्गों और अस और स ब के दूने धरातल के इसलिये अब परका बर्ग बराबर है अस और स ब परके बर्गों और अस और स ब के दूने धरातल के

टि०२—इस साध्य के साबित करने की तीसरी रीति यह है

चूंकि अब परका बर्ग बराबर है अब और ब स अ स ब के धरातल और अब और अस के धरातलों के योग के (२अ०मा०२) लेकिन अब और ब स का धरातल बराबर है ब स परके बर्ग और अस और स ब के धरातल के योग के और अब और अस का धरातल बराबर है अस परके बर्ग और अस और स ब के धरातल के योग के (२अ०मा०३) इसलिये अब परका बर्ग बराबर है अस और स ब परके बर्गों और अस और स ब के दूने धरातल के योग के

टि०३—अगर हम अस और स ब को जुड़ी २ रेखा खयाल करें तो यह साध्य इस तरह बयान होगी कि दो रेखाओं के योग पर का बर्ग बराबर होगा उन रेखाओं पर के बर्गों के योग और उन रेखाओं के धरातल के दूने के—याद रखना चाहिये कि रखागणित में दो रेखाओं के योग से वह एक रेखा मुराद है जो उन दो रेखाओं को इस तरह मिलाने से बने कि वह मिलकर एक सीध में हों

### बीजगणितीयसाधन

फर्ज करो कि अब लम्बाई में अ पैमाने है और अस और स ब लम्बाई में क्रम से म और न पैमाने हैं

तो अ = म + न

इन बराबर चीजों का बर्ग किया

इसलिये अ =  $\frac{२}{२} (म + न)$

इसलिये अ =  $\frac{२}{२} म + \frac{२}{२} न$

यानी अगर कोई अंक दो हिस्सों में बांटा जाय तो कुल अंक का बर्ग बराबर होगा दोनों हिस्सों के बर्गों और उनके दूने गुणनफल के

### अभ्यास

( ५ ) अगर एक सीधी रेखा कई हिस्सों में बांटी जाय तो कुल रेखा पर का बर्ग बराबर होगा सब हिस्सों पर के बर्गों से उन धरातलों के दूने के जो हर दो हिस्सों के जोड़ों से बनती है

( १७० )

( ६ ) अब स त्रिभुज का अ कोन समकोन है और अ द रेखा व स भुज पर लंब है साबित करो कि व द और द स का धरातल बराबर होगा अ द पर के वर्ग के

( ७ ) अगर किसी अब स समकोन त्रिभुज के व स कर्ण में से व द बराबर अब के और स य बराबर अ स के काटी जाय तो द य पर का वर्ग बराबर होगा व य और स द के धरातल के दूने के

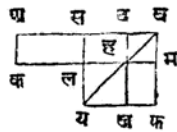
( ८ ) अगर किसी अब स समकोन त्रिभुज के अ समकोन से अ द लम्ब व स पर गिराया जाय तो व स और अ द के योग पर का वर्ग बड़ा होगा व अ और अ स के योग पर के वर्ग से बक़्तर अ द पर के वर्ग के

( ९ ) अब स समकोन त्रिभुज के जिसका अ कोन समकोन है भुजों के योग पर का वर्ग दूना है उस धरातल का जो व स और अ स के योग और व स और अ व के योग से बनती है

### साध ५ प्रमेयीपपाद्य

सा०सू०-अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर और दो नाबरा-

बर हिस्सों में बांटी जाय तो नाबराबर हिस्सों का धरातल और उस रेखा पर का वर्ग जा भाग बिन्दुओं के बीच में है मिलकर बराबर होंगे आधी रेखा पर के वर्ग के



वि०सू०-प्रकृति करो कि अब सीधी रेखा

स बिंदु पर दो बराबर हिस्सों में और

द बिंदु पर दो नाबराबर हिस्सों में बांटी गयी है तो अ द और

द व का धरातल और स द पर का वर्ग मिलकर बराबर होंगे स व पर के वर्ग के

अ० सब पर स य फ व वर्ग क्षेत्र बनाओ

१-सा०४६

और व य मिलाओ

और द से द ह ज समानान्तर स य या व फ की और व य से ह बिंदु पर और य फ से ज बिंदु पर गिरती हुई खींचो १-सा०३१

और ह से क ल म समानान्तर स व या य फ की और

( १७१ )

स य से ल बिंदु पर और द फ से म बिंदु पर मिलती हुई  
खींचो

१-सा०३१

और अ से अ क समानान्तर स ल या द म की और म ल का  
से क बिंदु पर मिलती हुई खींचो

१-सा०३१

उप०-अब चूंकि सह पूरक बराबर है द फ पूरक के

१-सा०४३

इन दोनों बराबरों में से हर एक में द म मिलाओ

इसलिये कुल स म बराबर है कुल द फ के

१-स्व०२

लेकिन चूंकि अ स बराबर है स व के

फर्क

इसलिये अ ल बराबर है स म के

१-सा०३६

लेकिन स म बराबर द फ के साबित हो चुका है

इसलिये अ ल बराबर है द फ के

१-स्व०१

इन दोनों बराबरों में से हर एक में सह मिलाओ

इसलिये कुल अ ह बराबर है द फ और सह के

१-स्व०२

लेकिन अ ह चेत अ द और द व का धरातल है क्योंकि द ह  
बराबर है द व के

और द फ और सह मिलाने से समज मापक बना है

इसलिये समज मापक बराबर है अ द और द व के  
धरातल के

इन दोनों बराबरों में से हर एक में ल ज जो स द परका वर्ग  
है ( २ अध्या० ४ सा० अनुमान ) मिलाओ

इसलिये समज मापक और ल ज मिलकर बराबर है अ द  
और द व के धरातल और स द पर के वर्ग के

१-स्व०२

लेकिन समज मापक और ल ज मिलकर स य फ व क्षेत्र  
को जो स व परका वर्ग है बनाते हैं

( १७२ )

इसलिये अ द और द व का धरातल और स द परका वर्ग मि-  
लकर बराबर हैं स व परके वर्ग के  
फल-इसलिये अगर कोई सीधी रेखा आद्योपान्त-यही साबित  
करना था

इस साध्य को इस तरह भी साबित करते हैं अ स द व  
चूँकि स द और द व का धरातल और द व पर का वर्ग मिलकर  
बराबर हैं स व और व द के धरातल के (२-सा३) और अ स बराबर है  
स व के इसलिये स द और द व का धरातल और द व पर का वर्ग मिल-  
कर बराबर हैं अ स और व द के धरातल के इन दोनों बराबरों में से हर  
एक में स द और द व का धरातल मिलाया इसलिये स द और द व के  
धरातल का दूना और द व पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं अ स और द व  
के धरातल और स द और द व के धरातल के योग के लेकिन अ स और  
द व का धरातल और स द और द व का धरातल मिलकर बराबर हैं  
अ द और द व के धरातल के (२-सा० १) इसलिये स द और द व के  
धरातल का दूना और द व पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं अ द और द व  
के धरातल के इन दोनों बराबरों में से हर एक में स द पर का वर्ग मिलाया  
इसलिये स द और द व के धरातल का दूना और स द और द व पर के  
वर्ग मिलकर बराबर हैं स द पर के वर्ग और अ द और द व के धरातल  
के योग के लेकिन स द और द व के धरातल का दूना और स द और द व  
पर के वर्ग मिलकर बराबर हैं स व पर के वर्ग के (२-सा० ४) इसलिये  
अ द और द व का धरातल और स द पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं  
स व पर के वर्ग के

टि० २ इस साध्य के पहले सूत्र के देखने से मालूम होगा कि अ द  
और द व का धरातल बराबर है स म ज मापक के लेकिन स म ज  
मापक स फ और ल ज क्षेत्रों का जो अ स और स द पर के वर्ग है  
अंतर है अगर अ स और स द जुड़ो २ रेखा ख्याल की जावे तो अ द  
रेखा अ स और स द दोनों रेखाओं का योग है और द व उन रेखाओं  
का अंतर है और इसलिये यह अनुमान इस साध्य से साबित है कि किसी  
दो रेखाओं के योग और अंतर का धरातल बराबर है उन रेखाओं पर के  
वर्गों के अंतर के

टि० ३ इस साध्य से साबित हुआ है कि अ द और द व का धरातल  
और स द पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं अ स या स व पर के वर्ग के यानी  
दो बराबर हिस्सों अ द और द व का धरातल हर मूल में बँटा है अ स



( १७३ )

या स व पर के बर्ग से लेकिन अ स या स व पर का बर्ग अ स और स व का धरातल है इसलिये इससे यह फल मावित हुआ कि किसी सीधी रेखा के दो हिस्सों का धरातल उस मूरत में सबसे बड़ा होगा जब भागान बिन्दु उस रेखा के आधे पर है

टि० ४ पांचवीं साध्य का दावा इस तरह भी बयान होसکتा है कि दो रेखाओं के योग के आधे पर का बर्ग उन रेखाओं के धरातल और रेखाओं के अंतर के आधे पर के बर्ग के बराबर है क्योंकि अगर अ द और द व रेखा जुड़ी २ खयाल की जावे तो अ स उन रेखाओं के योग की आधी है और स द उनके अंतर की आधी है और अ ह उन रेखाओं से बना हुआ धरातल है

### बीजगणितीय साधन

फर्ज करो कि अ व लम्बाई २ अ पैमाने है और उसका हर एक आधा अ स या स व लम्बाई में अ पैमाने है और स द लम्बाई में म पैमाने है

तो अ व के दो नाबराबर हिस्सों में बड़ा हिस्सा अ द लम्बाई में (अ+म) पैमाने है और छोटा हिस्सा द व लम्बाई में (अ-म) पैमाने है और म है (अ+म) और (अ-म) के अंतर का आधा

$$\text{चूँकि } (अ+म) (अ-म) = अ^2 - म^2$$

इन दोनों बराबरों में से हर एक में म<sup>२</sup> मिला दिया

$$\text{इसलिये } (अ+म) (अ-म) + म^2 = अ^2$$

यानी अगर कोई अंक दो बराबर और दो नाबराबर हिस्सों में बांटा जाय तो नाबराबर हिस्सों का गुणनफल और उन हिस्सों के अंतर के आधे का बर्ग मिलकर बराबर है उस अंक के आधे के बर्ग के

### अभ्यास

(१०) समकोन त्रिभुज की उन दो भुजाओं में से जो उसकी समकोन को बनाती है किसी भुजा का बर्ग बराबर होता है उस धरातल के जो त्रिभुज की दूसरी भुज और कर्ण के योग और अंतर से बनता है

(११) ऐसा धरातल बनाओ जो दो दिये हुए बर्गों के अंतर के बराबर हो

(१२) किसी सीधी रेखा को ऐसे दो हिस्सों में बांटो कि उन हिस्सों का धरातल बराबर हो दिये हुए बर्ग के

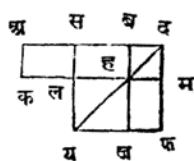
( १७४ )

## साध्य ६ प्रमेयोपपाद्य

**सा०सू०-** अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर हिस्सों में बांटी जाय और किसी बिन्दु तक बढ़ायी जाय तो उस कुल सीधी रेखा जो बढ़ाने से बनी है और बढ़े हुए हिस्से का धरातल और उस सीधी रेखा के आधे पर के बर्ग जो दो बराबर हिस्सों में बटी है मिलकर बराबर होंगे उस सीधी रेखा परके बर्ग के जो आधी रेखा और बढ़े हुए हिस्से से बनी है

**बि०सू०** फर्ज करो कि अ ब सीधी रेखा स बिन्दु पर दो बराबर हिस्सों में बटी है और द बिन्दु तक बढ़ायी गयी हो तो

अ द और द ब का धरातल और ब स परका बर्ग मिलकर बराबर होंगे स द पर के बर्ग के



अ० स द पर स य फ द बर्ग बनाओ (१ सा० ४६)

और य द मिलाओ

ब बिन्दु से ब ह ज रेखा स य या द फ की समानान्तर और द य से ह बिन्दु पर और य फ से ज बिन्दु पर मिलती हुई खींची और ह से क ल म रेखा अ द या य फ की समानान्तर और द फ से म बिन्दु पर और स य से ल बिन्दु पर मिलती हुई खींची और अ बिन्दु से अ क रेखा स ल या द म की समानान्तर और स ल क से क बिन्दु पर मिलती हुई खींची १-सा० ३१

**उप०** चूंकि अ स बराबर है स ब के

इसलिये अ ल समकोन चतुर्भुज बराबर है स द समकोन चतुर्भुज के

१-सा० ३६

लेकिन स ह बराबर है ह फ के

१-सा० ४३

इसलिये अ ल बराबर है ह फ के

१-स्व० १

इन दोनों बराबरों में से हर एक में स म मिलाया

( १७५ )

इसलिये कुल अ म बराबर है स म ज मापक के १-स्वा० २  
लेकिन अ म क्षेत्र अ द और द व का धरातल है क्योंकि  
द म बराबर है द व के

इसलिये स म ज मापक बराबर है अ द और द व के  
धरातल के

इन दोनों बराबरों में से हर एक में ल ज जो स व पर का  
वर्ग है मिलाया

इसलिये अ द और द व का धरातल और स व पर का  
वर्ग मिलकर बराबर हैं स म ज मापक और ल ज के योग के १-स्व० २

लेकिन स म ज मापक और ल ज क्षेत्र मिलकर स य फ द  
क्षेत्र जो स द पर का वर्ग है बनाते हैं

इसलिये अ द और द व का धरातल और स व पर का  
वर्ग मिलकर बराबर हैं स द पर के वर्ग के

फ़लत इसलिये अगर कोई सीधी रेखा आयोपान्त-यही साबित  
करना था

टि० १ छठी साध्य का दूसरा सुवृत यह है न अ स व द

अ स को न तक बढ़ाओ और स द के बराबर स न बनाओ

चूँकि स न बराबर है स द के और स व बराबर है अ स के इसलिये  
कुल न व बराबर है कुल अ द के अब चूँकि न व और व द का धरातल  
और स व पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं स द पर के वर्ग के ( २-सा० ५ )  
और अ द बराबर न व के साबित हो चुकी है इसलिये अ द और द व  
का धरातल और स व पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं स द पर के वर्ग के

टि० २ छठी साध्य के पछले सुवृत के देखने से मालूम होगा कि अ द  
और द व का धरातल बराबर है स म ज मापक के लेकिन स म ज मापक  
स फ और ल ज क्षेत्रों का जो स द और अ स पर के वर्ग हैं अंतर है  
अगर अ स और स द जुड़ी २ रेखा खयाल की जाय तो अ द रेखा अ स  
और स द रेखाओं का योग है और द व उनका अंतर है और इसलिये  
यह अनुमान जो हम पाँचवीं साध्य के टिप्पण में लिख चुके हैं इस छठी

( १७६ )

साध्य से भी साबित है कि किसी दो रेखाओं के योग और अन्तर का धरातल बराबर है उन रेखाओं पर के बर्गों के अन्तर के

टि० ३ अगर अ द और द ब जुदी २ रेखा खयाल की जावें तो स द उन दोनों रेखाओं के योग की आधी है और स ब उनके अन्तर की आधी है और अ म उनसे बना हुआ धरातल है और इसलिये इस साध्य का वही दावा हो सक्ता है जो पांचवीं साध्य का है ( सा० ५ के टिप्पन ४ में देखो ) यानी दो रेखाओं के योग के आधे पर का बर्ग बराबर है उनके धरातल और उनके अन्तर के आधे पर के बर्ग के

### बीजगणितीय साधन

फर्ज करो कि अ ब लम्बाई में २ अ पैमाने है और उसका आधा अस या स ब लम्बाई में अ पैमाने है और ब द लम्बाई में म पैमाने है

तो अ द लम्बाई में  $(२ अ + म)$  पैमाने है

चूँकि  $(२ अ + म) \times म = २ \times अ \times म + म^२$

इन दोनों बराबरों में से हर एक में अ मिलाया

इसलिये  $(२ अ + म) \times म + अ^२ = अ^२ + २ \times अ \times म + म^२$

लेकिन  $अ^२ + २ \times अ \times म + म^२ = (अ + म)^२$

इसलिये  $(२ अ + म) \times म + अ^२ = (अ + म)^२$

यानी अगर कोई अंक दो बराबर हिस्सों में बांटा जाय और कोई दूसरा अंक पहले कुल अंक और उसके एक हिस्से में मिलाया जाय तो दोनों अंकों के योग और दूसरे अंक का गुणनफल और पहले अंक के आधे का बर्ग मिलकर बराबर है उस अंक के बर्ग के दो पहले अंक के आधे और दूसरे अंक के योग से बनता है

### अभ्यास

(१३) किसी सीधी रेखा को इतना बाँटाओ कि कुल बड़ी हुई रेखा और उसके बड़े हुए हिस्से का धरातल बराबर हो दिये हुए बर्ग के

(१४) अब स त्रिभुज के किसी अ कोन से अ द लम्ब बस भुज पर डाला गया है साबित करो कि अ ब और अ स के योग और अन्तर से जो धरातल बनता है वह बराबर होगा उस धरातल के जो ब स और उ म अन्तर से जो ब द और स द के बीच में है बनता है

(१५) अब स त्रिभुज के किसी अ कोन से अ द लम्ब बस भुज पर डाला गया है साबित करो कि अ ब और अ स का अन्तर छोटा है ब द और स द के अन्तर से

( १७७ )

( १६ ) अब स समदिबाहु त्रिभुज है और उसके अब आधार पर यह उसके बड़े हुए हिस्से पर द बिंदु है तो साबित करो कि अ द और द व का घरातल बराबर है अस और सद परके वर्गों के अन्तर के

( १७ ) अब, सद और य फ ऐसे ही तीन सीधी रेखा है कि अब और सद का अंतर बराबर है सद और य फ के अंतर के साबित करो कि अब और य फ का घरातल और अब और सद के अंतर परका वर्ग मिलकर बराबर है सद परके वर्ग के

( १८ ) अब स विषमबाहु त्रिभुज है सद लम्ब अब पर है और य विन्दु अब भुज के बीचोंबीच का बिंदु है साबित करो कि अस और सव परके वर्गों का अन्तर बराबर है उस घरातल के दूरे के जो अ य और द य से बनता है और इस नतीजे से त्रिभुज का क्षेत्रफल दर्शाफ्त करने का कायदा लिखो जब कि उसके तीनों भुजों की लम्बाइयां मालूम हैं

### सः ७-प्रमेयोपपाद्य

सा०सू० अगर कोई सीधी रेखा किसी दो हिस्सों में बांटी जाय तो कुल सीधी रेखा और उसके एक हिस्से परका वर्ग मिलकर बराबर होंगे कुल सीधी रेखा और उस हिस्से के घरातल के दूने और दूसरे हिस्से परके वर्ग के

वि०सू० फर्ज करो कि अ व सीधी रेखा किसी दो हिस्सों में स बिंदु पर बांटी गयी है तो अव और व स परके वर्ग मिलकर ब-



राबर होंगे अ व और व स के दूने घरातल और अ स परके वर्ग के

अ०-अव पर अ द य व वर्ग बनाओ

१-सा० ४६

और व द मिलाओ

स बिंदु से स फ रेखा अ द या व य की समानान्तर और व द से ज पर और द य से फ पर मिलती हुई खींचो १-सा० ३१

और ज से ह ज क रेखा अ व या द य की समानान्तर और अ द से ह पर मिलती हुई और व य से क बिंदु पर मिलती हुई खींचो-

१-सा० ३१

( १७८ )

उप० अब चूंकि अ व बराबर है ज य के १-सा० ४३

इन दोनों बराबरों में से हर एक में स क मिलाया

इसलिये कुल अ क बराबर है कुल स य के १-स० २

इसलिये अ क और स य मिलकर दूने हैं अ क के २-स० २

लेकिन अ क और स य मिलकर अ क फ मापक और स क

वर्ग हैं

इसलिये अ क फ मापक और स क वर्ग मिलकर दूने हैं

अ क के

लेकिन अ व और व स के धरातल का दूना भी अ क से दूना

है क्योंकि व क बराबर है व स के

इसलिये अ क फ मापक और स क वर्ग मिलकर बराबर हैं

अ व और व स के धरातल के दूने के

इन दोनों बराबरों में से हर एक में ह फ जो अ स परका

वर्ग है मिलाया

इसलिये अ क फ मापक और स क वर्ग और ह फ वर्ग

मिलकर बराबर हैं अ व और व स के धरातल के दूने और अ स

परके वर्ग के

लेकिन अ क फ मापक और स क वर्ग और ह फ वर्ग मि-

लकर अ द य व और स क क्षेत्रों को जो अ व और व स पर

के वर्ग हैं बनाते हैं

इसलिये अ व और व स परके वर्ग मिलकर बराबर हैं अ व

और व स के धरातल के दूने और अ स पर के वर्ग के

फल-इसलिये अगर कोई सीधी रेखा आदीपान्त-यही साबित

करना था

टि० १- सातवीं साध्य का दूसरा सूत्र यह है

अ स पर अ द य स वर्ग बनाओ और द अ,

य द और स य को बढ़ाकर अ फ, द ज और य ह

बराबर स व के बनाओ और व फ, फ ज, ज ह

और ह व को मिलाओ





( १७८ )

चूँकि त्रिभुज व अ फ, फ द ज, ज य ह और ह स व में भुज अ फ, द ज, य ह और स व आपस में बराबर हैं और भुज अ व, द फ, य ज और स ह आपस में बराबर हैं और कोन अ, द, य और स समकोन हैं इसलिये चारों त्रिभुज सब तरह आपस में बराबर हैं यानी आधार व फ, फ ज, ज ह और ह व आपस में बराबर हैं और कोन अ व फ, द फ ज, य ज ह और स ह व आपस में बराबर हैं और कोन अ फ व, द ज फ, य ह ज और स ह व आपस में बराबर हैं (१- सा० ४) इसलिये चारों त्रिभुज मिलकर त्रिभुज अ व स के चौगुने हैं यानी अ व और व स के धरातल के दूने हैं (१- सा० ४१ के टि० २ को देखो)

अब चूँकि कोन अ व फ बराबर है कोन द फ ज के इसलिये कोन अ व फ और अ फ व बराबर हैं कोन द फ ज और अ फ व के यानी बराबर हैं कुल कोन व फ ज के लेकिन कोन अ व फ और अ फ व मिलकर एक समकोन है (१- सा० ३२) इसलिये कोन व फ ज समकोन है और इसी तरह साबित होसकता है कि कोन फ ज ह, ज ह व और ह व फ में से हर एक समकोन है इसलिये क्षेत्र व फ ज ह समकोन चतुर्भुज है और उसकी भुज व फ, फ ज, ज ह और ह व आपस में बराबर हैं इसलिये व फ ज ह बर्ग व फ परका है और बराबर है अ व और अ फ पर के बर्गों यानी अ व और व स परके बर्गों के (१- सा० ४७) लेकिन व फ ज ह बर्ग बराबर है चार त्रिभुज अ व फ, फ द ज, ज य ह और ह स व और बर्ग अ द य स के योग के जो बराबर है अ व और व स के धरातल के दूने और अ स पर के बर्ग के इसलिये अ व और व स पर के बर्ग मिलकर बराबर है अ व और व स के धरातल के दूने और अ स परके बर्ग के

टि० २ सातवीं साध्य का तीसरा सुवृत्त यह है अ स व

चूँकि अ व और व स का धरातल बराबर है अ स और स व के धरातल और स व परके बर्ग के (१- सा० ३) इसलिये अ व और व स के धरातल का दूना बराबर है अ स और स व के धरातल के दूने और स व पर के बर्ग के दूने के इन दोनों बराबरों में से हर एक में अ स पर का बर्ग मिलाया इसलिये अ व और व स के धरातल का दूना और अ स पर का बर्ग मिलकर बराबर है अ स और स व के धरातल के दूने और स व पर के बर्ग के दूने के और अ स पर के बर्ग के लेकिन अ स और स व के धरातल का दूना और स व और अ स पर के बर्ग मिलकर बराबर है अ व पर के बर्ग के (१- सा० ४) इसलिये अ व और व स पर के बर्ग मिलकर बराबर है अ व और व स के धरातल के दूने और अ स परके बर्ग के

( १८० )

टि० ३ अगर हम अ व और व स को जुड़ी रेखा खयाल करें और इसलिये अ स को उनका अन्तर समझें तो इस साध्य का दावा इस तरह बयान होगा कि दो रेखाओं पर के वर्गों का योग बराबर है उनके घरातल के दूने और उनके अन्तर परके वर्ग के

सातवीं साध्य के इस दावे और चौथी साध्य के उस दावे से जो उसके टिप्पण ४ में लिखा है हम इन दोनों साध्यों का यह संबंध निकालते हैं

साध्य ४ से योग का वर्ग = वर्गों का योग + दूना घरातल

साध्य ७ से अन्तर का वर्ग = वर्गों का योग - दूना घरातल

### बीजगणितीय साधन

फुर्ज करो कि अ व लम्बाई में अ पैमाने है और उसके हिस्से अ स और सब लम्बाई में स और न पैमाने है

तो अ = (स + न)

इन दोनों बराबरों का वर्ग किया

इसलिये अ<sup>२</sup> = स<sup>२</sup> + २ × स × न + न<sup>२</sup>

इन दोनों बराबरों में से छरक में न<sup>२</sup> मिलाया

इसलिये अ<sup>२</sup> + न<sup>२</sup> = स<sup>२</sup> + २ × स × न + २ न<sup>२</sup>

लेकिन २ × स × न + २ × न<sup>२</sup> = २(स + न) × न = २ × अ × न

इसलिये अ<sup>२</sup> + न<sup>२</sup> = स<sup>२</sup> + २ × अ × न

दानी अगर कोई अंक किसी दो हिस्सों में बांटा जाय तो कुल अंक और एक हिस्से के वर्ग मिलकर बराबर है कुल अंक और उस हिस्से के गुणनफल के दूने और दूसरे हिस्से के वर्ग के

### अभ्यास

(१८) अगर अ व रेखा स बिन्दु पर इस तरह बांटी जाय कि अ स पर का वर्ग दूना हो स व पर के वर्ग के तो साबित करो कि अ व और व स पर के वर्गों का अन्तर दूना है अ व और व स के घरातल का

### साध्य ८ प्रमेयोपपाद्य

सा० सू०—अगर कोई सीधी रेखा दो हिस्सों में बांटी जाय तो कुल रेखा और उस के किसी हिस्से का चौगुना घरातल और दूसरे हिस्से पर का वर्ग मिलकर बराबर होंगे उस सीधी रेखा पर के वर्ग के जो कुल रेखा और पहले हिस्से के बनती है

( १८१ )

**वि० सू०**—फर्ज करो कि **अ व** सीधी रेखा किसी दो हिस्सों में **स** बिन्दु पर बांटी गयी है तो **अ व** और **व स** के धरातल का चौगुना और **अ स** पर का वर्ग मिलकर बराबर होंगे उस रेखा पर के वर्ग के जो **अ व** और **स व** से बनती है



**अं०** **अ व** को **द** तक इतना बढ़ाया कि **व द** बराबर हो

**स व** के

१- सा० ३

**अ द** पर **अ य** **फ द** वर्ग बनाओ

१- सा० ४६

**द य** मिलाओ

**व** और **स** बिन्दुओं से **व ल** और **स ह** रेखा **अ य** या **द फ** की समानान्तर और **द य** से **क** और **ख** पर और **य फ** से **ल** और **ह** पर मिलती हुई खींची (१ सा० ३१)

**क** और **ख** से **म ज क न** और **त ख र च** रेखा **अ द** या **य फ** की समानान्तर खींची (१ सा० ३१)

**उप०**—अब चूंकि **स व** बराबर है **व द** की और **स व** बराबर है **ज क** की और **व द** बराबर है **क न** के

इसलिये **ज क** बराबर है **क न** के

इसीतरह **ख र** बराबर है **र च** के

चूंकि **स द** बराबर है **व द** के और **ज क** बराबर है **क न** के इसलिये **स क** समकोन चतुर्भुज बराबर है **व न** समकोन चतुर्भुज के और **ज र** बराबर है **र न** के (१ सा० ३६)

लेकिन **स क** बराबर है **र न** के (१ सा० ४३)

इसलिये **व न**, **स क**, **ज र** और **र न** चारों समकोन चतुर्भुज

( १८२ )

आपस में बराबर हैं और चारों मिलकर किसी एक स क के चौगुने हैं

चूंकि स व बराबर व द के और व द बराबर व क के है यानी बराबर स ज के है और चूंकि स व बराबर ज क यानी ज ख के है

इसलिये स ज बराबर ज ख के है

चूंकि स ज बराबर ज ख के और ख र बराबर र च के है

इसलिये अ ज बराबर म ख के और ख ल बराबर र फ के है ( १सा० ३६ )

लेकिन म ख बराबर ख ल के है ( १सा० ४३ )

इसलिये अ ज बराबर र फ के है ( १स्व० १ )

इसलिये अ ज, म ख, ख ल और र फ चारों समकीन चतुर्भुज आपस में बराबर हैं और चारों मिलकर किसी एक अ ज के चौगुने हैं

और यह साबित हो चुका है कि स क, व न, ज र और र न चारों समकीन चतुर्भुज मिलकर स क के चौगुने हैं

इसलिये आठों समकीन चतुर्भुज जिनसे अ व ह मापक बनता है अ क के चौगुने हैं

चूंकि अ क छेद अ व और व स का धरातल है क्योंकि व क बराबर है व स के इसलिये अ व और व स के धरातल का चौगुना अ क का चौगुना है

लेकिन यह साबित हो चुका है कि अ व ह मापक अ क का चौगुना है

इसलिये अ व और व स के धरातल का चौगुना बराबर है अ व ह मापक के ( १स्व० १ )

( १८३ )

इन दोनों बराबरों में से हर एक में त ह जो अ स पर का वर्ग है मिलाया

इसलिये अ व और व स के धरातल का चौगुना और अ स पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं अ व ह मापक और त ह वर्ग के लेकिन अ व ह मापक और त ह वर्ग मिलकर अ य फ द क्षेत्र की जो अ द पर का वर्ग है बनाते हैं

इसलिये अ व और व स के धरातल का चौगुना और अ स पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं अ द पर के वर्ग के यानी उस रेखा पर के वर्ग के जो अ व और व स से बनती है

**फट्ट**—इसलिये अगर कोई सीधी रेखा आद्योपन्त-यही साधित करना था

टि० १ आठवीं साध का दूसरा सूत्र यह है

अ व की दू तक इतना बढ़ाओ कि व द बराबर हो व स के और अ द पर अ य फ द वर्ग बनाओ ( १ अ०-सा० ४६ ) अ व में से अ ज और य फ में से य ह और फ द में से फ क बराबर बस के बनाओ ज ल रेखा अ द की समानान्तर और ह स रेखा अ व की समानान्तर और क न रेखा य फ की समानान्तर और द ख रेखा व स की समानान्तर खींचो



चूंकि अ द, अ व, य फ और फ द आपस में बराबर हैं और अ ज, य ह, फ क, और द व आपस में बराबर हैं इसलिये अ व, ज य, ह फ और क द आपस में बराबर हैं ( १ अ०-सा० ३ ) इसलिये अ ल, ज ह, ह क और क व समकोण चतुर्भुज आपस में बराबर हैं ( १ अ०-सा० ३६ ) और चारों मिलकर किसी एक अ ल के चौगुने हैं लेकिन अ व और व स के धरातल का चौगुना भी अ ल का चौगुना है क्योंकि बल बराबर है व स के इसलिये अ ल, ज ह, ह क और क व समकोण चतुर्भुज मिलकर बराबर हैं अ व और व स के चौगुने धरातल के

फिर चूंकि ज ल, म ह, न क और ख व आपस में बराबर हैं क्योंकि हर एक बराबर है अब के और ज म, ह न, क ख और व ल आपस में

( १८४ )

बराबर हैं क्योंकि हर एक बराबर है वस के इसलिये लम, म न, नख, ख ल और अ स आपस में बराबर हैं इसलिये मख समकोन चतुर्भुज अ स परका वर्ग है लेकिन यह साबित हो चुका है कि अ ल, ज ह, ह क और क ब समकोन चतुर्भुज मिलकर बराबर हैं अब और व स के चौगुने घरातल के इसलिये अ ल, ज ह, ह क, क ब और मख पांचों समकोन चतुर्भुज मिलकर बराबर हैं अब और व स के चौगुने घरातल के और अ स परके वर्ग के लेकिन यह पांचों समकोन चतुर्भुज मिलकर अ य फ द को जो अ द परका वर्ग है बनाते हैं इसलिये अब और व स के घरातल का चौगुना और अ स परका वर्ग मिलकर बराबर है अ द परके वर्ग के यानी उस रेखा परके वर्ग के जो अब और व स से बनती है

टि० २ आठवीं साध्यका तीसरा सुदूत यह है अ स व द

अब जो द तक इतना बढ़ाया कि ब द बराबर हो व स के

चूंकि अब और ब द के घरातल का दूना और अब और व द परके वर्ग मिलकर बराबर हैं अ द परके वर्ग के ( २-सा०४ ) लेकिन ब द बराबर है व स के इसलिये अब और व स के घरातल का दूना और अब और व स परके वर्ग मिलकर बराबर हैं अ द परके वर्ग के लेकिन अब और व स परके वर्ग मिलकर बराबर हैं अब और व स के घरातल के दूने और अ स परके वर्ग के ( २-सा०७ ) इसलिये अब और व स के घरातल का चौगुना और अ स परका वर्ग मिलकर बराबर है अ द परके वर्ग यानी उस रेखा परके वर्ग के जो अब और व स से बनती है

टि० ३- अगर अब और व स जुड़ी रेखा खयाल की जायें तो इस साध्यका दावा इस तरह बयान होसکتा है कि दो रेखाओं के योग परका वर्ग उनकी अंतर परके वर्ग से बराबर उनकी घरातल के चौगुने के जियादा होता है

## बीजगणितीय साधन

दर्ज करो कि अब रेखा लम्बाई में अ पैमाने और उस के अ स और स वाहिखो लम्बाई में क्रम से म और न पैमाने हैं

तो अ = म + न

इन दोनों बराबरों में से हर एक में से न निकाला

इसलिये स = अ - न

इन दोनों बराबरों का वर्ग किया



( १८५ )

$$\text{इसलिये } m^2 = a^2 - 2 \times a \times n + n^2$$

इन दोनों बराबरों में से हर एक में  $8 \times a \times n$  मिलाया

$$\text{इसलिये } 8 \times a \times n + m^2 = a^2 + 2 \times a \times n + n^2$$

$$\text{लेकिन } a^2 + 2 \times a \times n + n^2 = (a + n)^2$$

$$\text{इसलिये } 8 \times a \times n + m^2 = (a + n)^2$$

यानी अगर कोई अंक दो हिस्सों में बांटा जाय तो कुल अंक और उसके एक हिस्से का चौगुना गुणनफल और दूसरे हिस्से का वर्ग मिलकर बराबर है उस अंक के वर्ग के जो कुल अंक और उसके प्रद्विजे हिस्से के योग से बनता है-

## अभ्यास

(२०) दूसरे अध्याय की ८ वीं साध को उसी अध्याय की ५ वीं या ६ वीं साध की भद से साबित करो

## साध्य ६ प्रमेयोपपाद्य

**सा०सू०**—अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर और दो नाबराबर हिस्सों में बांटीजाय तो दो ना बराबर हिस्सों पर के वर्ग मिलकर दूने होते हैं आधी रेखा पर के वर्ग और उस रेखा पर के वर्ग के जो भागबिन्दुओं के बीच में है

**वि०सू०**—फर्ज करोकि अव सीधीरेखा स बिंदु पर दो बराबर हिस्सों में और द बिन्दु



पर दो ना बराबर हिस्सों में बांटी गयी है तो अद और दब पर के वर्ग मिलकर दूने होंगे अस और सद पर के वर्गों के योग के

**अं०** स बिंदु से सय रेखा अब के साथ समकोन बनाती हुई खींचो

१-सा० ११

सय बराबर अस या सब के बनाओ

१-सा० ३

और यअ या यब मिलाओ

दसे दफ रेखा सय की समानान्तर और यब से फ बिंदु पर मिलती हुई खींचो और फ से फज रेखा अब की समा

( १८६ ) १

नान्तर खींचो

१-सा० ३१

और अफ मिलाओ

उप. अब चूँकि अस बराबर है सय के इसलिये अयस  
कोन बराबर है य अस कोन के १- सा० ५

चूँकि असय कोन समकोन है इसलिये अयस और य-  
अस कोन मिलकर एक समकोन है ( १-सा० ३२ )

और चूँकि यह दोनों कोन आपस में बराबर हैं इसलिये हर  
एक इन में से आधा समकोन है

इसी तरह सयव और यवस कोनों में से भी हर एक आ-  
धा समकोन है

इसलिये कुल अयव कोन समकोन है

चूँकि जयफ कोन आधा समकोन है और यजफ सम-  
कोन है क्योंकि वह बराबर है अपने सामने के यसव अन्तः को-  
नके ( १-सा० २८ )

इसलिये यफज आधा समकोन है

इसलिये जयफ कोन बराबर है यफज कोन के  
इसलिये जफ भुज बराबर है जय भुज के ( १-सा० ६ )

फिर चूँकि फवद आधा समकोन है और फदव समकोन  
है क्योंकि वह बराबर है अपने सामने के यसव अन्तः कोन  
के ( १-सा० २८ )

इसलिये वफद आधा समकोन है

इसलिये फवद कोन बराबर है वफद कोन के

इसलिये दफ भुज बराबर है दव भुज के ( १-सा० ६ )

चूँकि अस बराबर है सय के

इसलिये अस पर का वर्ग सय पर के वर्ग के बराबर है

( १८७ )

इसलिये **अ स** और **स य** पर के बर्ग मिलकर दूने हैं **अ स**  
पर के बर्ग के ( २-स्व० २ )

लेकिन **अ य** पर का बर्ग बराबर है **अ स** और **स य** पर के  
बर्गों के योग के ( १-सा० ४७ )

इसलिये **अ य** पर का बर्ग दूना है **अ स** पर के बर्ग का  
फिर चूकि **य ज** बराबर है **ज फ** के

इसलिये **य ज** पर का बर्ग बराबर है **ज फ** पर के बर्ग के

इसलिये **य ज** और **ज फ** पर के बर्ग मिलकर दूने हैं **ज फ**  
पर के बर्ग के ( २-स्व० २ )

लेकिन **य फ** पर का बर्ग बराबर है **य ज** और **ज फ** पर के बर्गों  
के योग के ( १-सा० ४७ )

इसलिये **य फ** पर का बर्ग दूना है **ज फ** पर के बर्ग का  
लेकिन **ज फ** बराबर है **स द** के ( १-सा० ३४ )

इसलिये **य फ** पर का बर्ग दूना है **स द** पर के बर्ग का

लेकिन **अ य** पर का बर्ग दूना है **अ स** पर के बर्ग का

इसलिये **अ य** और **य फ** पर के बर्ग मिलकर दूने हैं **अ स**  
और **स द** पर के बर्गों के योग के

लेकिन **अ फ** पर का बर्ग बराबर है **अ य** और **य फ** पर  
के बर्गों के योग के ( १-सा० ४७ )

इसलिये **अ फ** पर का बर्ग दूना है **अ स** और **स द** पर के  
बर्गों के योग का

लेकिन **अ द** और **द फ** पर के बर्ग मिलकर बराबर हैं **अ फ**  
पर के बर्ग के ( १-सा० ४७ )

इसलिये **अ द** और **द फ** पर के बर्ग मिलकर दूने हैं **अ स**  
और **स द** पर के बर्गों के

( १८८ )

**लेकिन दफ बराबर है द व के**

**इसलिये अ द और द व पर के बर्ग मिलकर दूने हैं अ स और स द पर के बर्गों के**

**फल—इसलिये अगर कोई सीधी रेखा आद्योपान्त—यही**

**साबित करना था**

टि० १- नवीं साध्य का दूसरा सूत्र यह है अ \_\_\_\_\_ स व \_\_\_\_\_ व

चूँकि अ द परका बर्ग बराबर है अ स और स द के घरातल के दूने और अ स और स द पर के बर्गों के (२-सा ४) और ब स और स द के घरातल का दूना और द व पर का बर्ग मिलकर बराबर है ब स और स द पर के बर्गों के (२ अ०-सा० ७) इसलिये अ द और द व पर के बर्ग और ब स और स द के घरातल का दूना मिलकर बराबर है अ स और स द के घरातल के दूने और स द पर के बर्ग के दूने और अ स और ब स पर के बर्गों के (१ अ०-ख० २) लेकिन ब स बराबर है अ स के इसलिये अ द और द व पर के बर्ग और अ स और स द के घरातल का दूना मिलकर बराबर है अ स और स द के घरातल के दूने और अ स और स द पर के बर्गों के दूने के इन दोनों बराबर में से हर एक में से अ स और स द के घरातल का दूना निकाल डाला इसलिये अ द और द व पर के बर्ग मिलकर दूने हैं अ स और स द पर के बर्गों के (१ अ०-ख० ३)

टि० २ नवीं साध्य में साबित हुआ है कि दो नाबराबर हिस्सों अ द और द व पर के बर्ग मिलकर दूने हैं अ स और स द पर के बर्गों के यानी बराबर है अ स और स व पर के बर्गों के और स द पर के बर्ग के दूने के इसलिये दो बराबर हिस्सों अ स और स व पर के बर्ग मिलकर दो नाबराबर हिस्सों अ द और द व पर के बर्गों से हमेशा कम हैं इसलिये इस साध्य से यह अनुमान साबित हुआ कि किसी रेखा के दो हिस्सों पर के बर्गों का योग उस हालत में सब से कम होगा जब कि भागबिंदु रेखा के आधे पर है

### बीजगणितीय साधन

फर्ज़ करो कि अ व रेखा लम्बाई में २ अ पैमाने है और उसका आधा अ स या स व लम्बाई में अ पैमाने है और स द रेखा जो भागबिंदुओं के बीच में है स पैमाने है

तो अ द लम्बाई में (अ+स) पैमाने है और द व लम्बाई में (अ-स) पैमाने है

( १८८ )

$$\text{अब } (अ + म) = अ + २ \times अ \times म + म$$

$$\text{और } (अ - म) = अ - २ \times अ \times म + म$$

$$\text{इसलिये } (अ + म) + (अ - म) = २अ + २म$$

यानी अगर कोई अंक दो बराबर और दो नाबराबर हिस्सों में बांटा जाय तो दो नाबराबर हिस्सों के वर्ग मिलकर दूने हैं आधे अंक के वर्ग और नाबराबर हिस्सों के अन्तर के आधे के वर्ग के

## अभ्यास

( २१ ) किसी सीधी रेखा को ऐसे दो हिस्सों में बांटो कि दोनों हिस्सों परके वर्ग मिलकर बराबर हों दिये हुए वर्ग के और बताओ कि किस हालत में इस साध्य का सावित होना नामुमकिन है

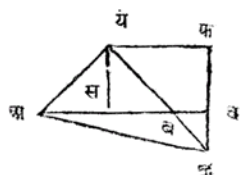
( २२ ) अगर कोई अब सीधी रेखा स बिन्दु पर दो बराबर हिस्सों में और द बिन्दु पर दो नाबराबर हिस्सों में बांटी जावे तो अद और दब परके वर्ग मिलकर बराबर होंगे स द परके वर्ग की चौगुने और अद और दब के धरातल के दूने के

( २३ ) अगर अब स समकोन समद्विबाहु त्रिभुज की बस करण में कोई द बिन्दु लिया जाय तो अद परके वर्ग का दूना बराबर होगा ब द और द स परके वर्गों के

## साध्य १० प्रमेयोपपाद्य

सा० सूत्र-अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर हिस्सों में बांटी जाय और किसी बिन्दु तक बढ़ायी जाय तो कुल बड़ी हुई रेखा पर का वर्ग और बढ़े हुए हिस्से पर का वर्ग मिलकर दूने होंगे आधी सीधी रेखा पर के वर्ग और उस रेखा पर के वर्ग के जो आधी रेखा और बढ़े हुए हिस्से से बनती है

वि० सूत्र फ़र्ज करो कि अब सीधी रेखा स बिन्दु पर दो बराबर हिस्सों में बांटी गयी है और द तक बढ़ायी गयी है तो अद और दब पर के वर्ग मिलकर दूने होंगे अस और स द पर के वर्गों के



अ० स बिन्दु से स य रेखा अब के साथ समकोन बनाती हुई खींचो-सा० ११

( १६० )

और स य बराबर अ स या स ब के बनाओ और अ य और य व मिलाओ

य से य फ रेखा अ व की समानान्तर और द से द फ रेखा स य की समानांतर और य फ से फ बिन्दु पर मिलती हुई खींची १-सा० ३१

उप० अब चूंकि य फ रेखा स य और फ द दो समानान्तर रेखाओं पर गिरती है

इसलिये स य फ और य फ द कोन दो समकोन के बराबर हैं १-सा० ३२

इसलिये अ द फ और य फ द कोन दो समकोन के कम हैं

इसलिये य व और फ द अगर व और द की तरफ बढ़ाये जाय तो मिल जायगी १-सा० १२

सुझा करी कि य व और फ द बढ़कर ज बिन्दु पर मिलती हैं अ ज मिलाओ

अब चूंकि अ स बराबर है स य के

इसलिये स य अ कोन बराबर है य अ स कोन के १-सा० ५ और अ स य समकोन है

इसलिये स य अ और य अ स कोनों में से हर एक आधा समकोन है (१-सा० ३२)

इसी तरह स य व और य व स में से हर एक आधा समकोन है

इसलिये कुल अ य व समकोन है

चूंकि य व स कोन आधा समकोन है

इसलिये द व ज कोन भी आधा समकोन है १-सा० १५

लेकिन व द ज समकोन है क्योंकि वह बराबर है द स य

एकान्तर कोन के

१-सा० २६

इसलिये द ज व आधा समकोन है और इसलिये बराबर है द व ज कोन के



( १८१ )

इसलिये व द्भज बराबर है द्ज भुजके १-सा०६

फिर चूंकि य ज फ आधा समकोन है और य फ ज  
समकोन है क्योंकि वह बराबर है य स द् कोनके १-सा०३४

इसलिये फ य ज आधा समकोन है और इसलिये बराबर है  
य ज फ कोनके

इसलिये ज फ बराबर है फ य के १-सा०६

चूंकि य स बराबर है स अ के

इसलिये य स परका वर्ग बराबर है स अ परके वर्ग के

इसलिये य स और स अ परके वर्ग मिलकर दूने हैं स अ पर  
के वर्ग के

लेकिन य अ परका वर्ग बराबर है य स और स अ परके वर्गों  
के १-सा०४७

इसलिये य अ परका वर्ग दूना है अ स परके वर्गका

फिर चूंकि ज फ बराबर है फ य के

इसलिये ज फ परका वर्ग बराबर है फ य परके वर्ग के

इसलिये ज फ और फ य परके वर्ग मिलकर दूने हैं फ य पर  
के वर्ग के

लेकिन य ज परका वर्ग बराबर है ज फ और फ य परके  
वर्गोंके १-सा०४७

इसलिये य ज परका वर्ग दूना है फ य परके वर्गका

लेकिन फ य बराबर है स द् के १-सा०३४

इसलिये य ज परका वर्ग दूना है स द् परके वर्गका

लेकिन यह साबित हो चुका है कि य अ परका वर्ग दूना है  
अ स परके वर्गका

इसलिये य अ और य ज परके वर्ग मिलकर दूने हैं अ स और  
स द् परके वर्गों के

( १८२ )

लेकिन अज परका बर्ग बराबर है य अ और यज परके  
बर्गोंके १-सा०४७

इसलिये अज परका बर्ग दूना है अ स और स द परके  
बर्गोंका

लेकिन अ द और द ज परके बर्ग मिलकर बराबर हैं अ ज  
परके बर्ग के १-सा०४७

इसलिये अ द और द ज परके बर्ग मिलकर दूने हैं अ स  
और स द परके बर्गोंके

लेकिन द ज बराबर है द व के

इसलिये अ द और द व परके बर्ग मिलकर दूने हैं अ स  
और स द परके बर्गोंके

फल-इसलिये अगर कीर्द सीधी रेखा आयोपान्त-यही साबित  
करना था

टि० १- दसवीं साध्यका दूसरा सूत्र ठीक वैसाही है जैसा कि नवीं  
साध्यका दूसरा सूत्र है

चूंकि अ द परका बर्ग बराबर है अ स और स द अ स व द  
के दूने धरातल और अ स और स द परके बर्गोंके (२-सा०४)

और व स और स द का दूना धरातल और द व परका बर्ग मिलकर  
बराबर है व स और स द परके बर्गोंके (२-सा०७) इसलिये अ द और  
द व परके बर्ग और व स और स द का दूना धरातल मिलकर बराबर है  
अ स और स द के दूने धरातल और स द परके दूने बर्ग और अ स और  
स व परके बर्गोंके (१-स्व०२) लेकिन व स बराबर है अ स के इसलिये  
अ द और द व परके बर्ग और अ स और स द का दूना धरातल मिलकर  
बराबर है अ स और स द के दूने धरातल और अ स और स द परके  
बर्गोंके दूने के इन दोनों बराबरों में से अ स और स द का दूना धरातल  
निकाल डाला इसलिये अ द और द व परके बर्ग मिलकर दूने हैं अ स  
और स द परके बर्गों के १-स्व०३

टि० २ दसवीं साध्यका तीसरा सूत्र यह है य अ स व द

व अ को य तक बनाओ और अ य बराबर व द के बनाओ चूंकि  
द अ और अ य परके बर्ग मिलकर दूने हैं द स और स अ परके बर्गों के

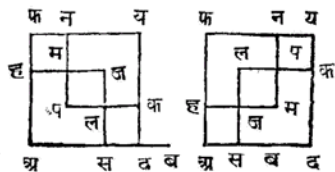
( १८३ )

( १-सा० ६ ) और अ य बराबर है द व के इसलिये अ द और व द परके बर्ग मिलकर दूने हैं अस और स द परके बर्गों के

टि० ३ ६ वीं और १० वीं साध्य का एकही सुबूत जो “ मिस हल्डा-हड़सन ने इंजाद किया है नीचे लिखा जाता है

अ व बिंदु स पर दो बराबर हिस्सों में बांटी गई है और बिंदु द पर दो नाबराबर हिस्सों में ( अन्तः खंड साध्य ६ अध्याय २ ) या ( बहिः खंड साध्य १० अध्याय २ ) बांटी गई है

अ द और अस और स द  
पर अ व के एकहीतरफ़ अ द य फ  
और अ स ज ह और स द क ल  
वर्ग बन ओ १-सा० ४६



अ य बर्ग के अन्तर फ ह पर फ ह म न बर्ग बनाओ १-सा० ४६

यह बराबर है स द पर के बर्ग के

फ़र्ज़ करो कि न म और क ल ( बाँकर अगर ज़रूरत हो ) प बिंदु पर मिलते हैं अब प य बराबर है अ स पर के बर्ग के और प ज बराबर है व द पर के बर्ग के अ द और द व पर के बर्गों का योग बराबर है अ य और प ज क्षेत्रों के यानी बराबर है अ ज और प य और स क और फ म के यानी दूना है अ ज और स क के योग का यानी अ स और स द पर के बर्गों का दूना है

टि० ४ यह जाहिर है कि नवीं साध्य का कल्पित अर्थ वही है जो पांचवीं साध्य का है और दसवीं साध्य का कल्पित अर्थ वही है जो छठी साध्य का है - दसवीं साध्य नवीं साध्य के साथ वही इलाका रखती है जो छठी साध्य पांचवीं के साथ रखती है और इसलिये नीचे लिखे दो दावों में हर एक नवीं और दसवीं दोनों साध्यों का दावा हो सक्ता है

१ दो रेखाओं पर के बर्ग मिलकर उन रेखाओं के योग और अन्तर के आधों परके बर्गों के दूने होते हैं क्योंकि अगर अ द और द व जुड़ी २ रेखा खयाल की जाविं तो स द और अ स में से एक उन रेखाओं के योग की आधी और दूसरी उनके अन्तर की आधी है

( १८४ )

(२) दो रेखाओं के योग और अन्तर पर के वर्ग मिलकर दूने होते हैं  
उन रेखाओं पर के वर्गों के क्योंकि अगर अ स और स द जुड़ी २ रेखा  
ख़याल की जावें तो अ द उनका योग और व द अन्तर है

### बीजगणितीय साधन

फ़र्ज करो कि अ व लम्बाई में २ अ पैमाने और उसके आधे अ स या  
स व लम्बाई में अ पैमाने हैं और व द लम्बाई में स पैमाने हैं इसलिये  
अ द लम्बाई में (२अ + स) पैमाने और स द लम्बाई में (अ + स)  
पैमाने हैं

$$\text{चूँकि } (२अ + स)^२ = ४ अ^२ + ४ \times अ \times स + स^२$$

$$\text{इसलिये } (२अ + स) \div स = ४ अ^२ + ४ \times अ \times स + २ स^२$$

$$\text{लेकिन } ४अ^२ + ४ \times अ \times स + २स^२ = २अ^२ + २अ^२ + ४ \times अ \times स + २स^२ \\ = २ अ^२ + २(अ + स)^२$$

$$\text{इसलिये } (२अ + स)^२ + स^२ = २(अ + स)^२ + २अ^२$$

इसलिये अगर कोई दिया हुआ अंक दो बराबर हिस्सों में बाँटा जाय  
और कुल अंक और उसके एक हिस्से में कोई दूसरा अंक मिलाया जाय  
तो बढ़ा हुआ कुल अंक और दूसरे अंक के वर्ग मिलकर दूने हैं दिये हुए  
अंक के आधे और उस अंक के वर्ग से जो दिये हुए अंक के आधे और  
दूसरे अंक से बना है

### अभ्यास

(२३) अ व स त्रिभुज में अ द रेखा अ कोण से व स को द बिंदु पर दो  
बराबर हिस्सों में काटती हुई खींची गई है साबित करो कि ब अ और  
अ स पर के वर्ग मिलकर दूने हैं व द और द अ पर के वर्गों के

(२५) साबित करो कि समानान्तर चतुर्भुज के चारों भुजों पर के वर्ग  
मिलकर बराबर हैं उसके दोनों कर्णों पर के वर्गों के

(२६) अ ब स द चतुर्भुज के अ स और व द कर्ण के बीचों बीच के  
य और फ़ बिंदु हैं साबित करो कि चारों भुजों पर के वर्ग मिलकर बरा-  
बर हैं दोनों कर्णों पर के वर्गों के और य फ़ पर के चौगुने वर्ग के

( १८५ )

( २० ) किन्ती अ बिंदु से किसी व स द य समकोन समानान्तर चतुर्भुज के चारों कोनों तक अ व और अ स और अ द और अ य रेखा खींची गई है साबित करो कि अ व और अ द पर के बर्ग मिलकर बराबर है अ स और अ य पर के बर्गों के

( २१ ) अगर एक चिभुज के आधार की लम्बाई और जगह मालूम है और उसके गुजों पर के बर्गों का योग एकही है साबित करो कि इस चिभुज के शीर्ष का निधि एक वृत्त है

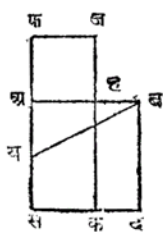
( २२ ) अगर अबस चिभुज के वस आधार पर द ऐसा बिंदु है कि अ व और व द पर के बर्ग मिलकर बराबर हैं अ स और स द पर के बर्गों की तो अ द की बीचोंबीच का बिंदु व और स से बराबर दूरी पर होगा

( २० ) एक सीधी रेखा और दो बिंदु दिये हुए हैं उस रेखा में एक ऐसा बिंदु दर्शाओ कि उन रेखाओं पर के बर्गों का योग जो दिये हुए बिंदुओं से उन बिंदु तक खींचो जाय सब से छोटा हो

### साध्य ११ वस्तुपपाद्य

सा० सू० दो ऊई रेखा को ऐसे दो हिस्सों में बांटो कि कुल रेखा और उसके एक हिस्से का धरातल बराबर हो दूसरे हिस्से पर के बर्ग के

बि० सू० फर्ज करो कि अ व दो ऊई सीधी रेखा है उसकी ऐसे दो हिस्सों में बांटना है कि कुल अ व रेखा और उसके एक हिस्से का धरातल बराबर हो दूसरे हिस्से पर के बर्ग के



अ०—अ व पर अ स द व बर्ग बनाओ

१-सा० ४६

अ स की अ बिंदु पर दो बराबर हिस्सों में बांटो १-सा० १०

व य मिलाओ और स अ की फ तक इतना बढ़ाओ कि व फ बराबर हो व व के

अ फ पर फ ज ह अ बर्ग बनाओ

१-सा० ४६

( १८६ )

तो अ व रेखा ह बिंदु पर ऐसी बंटी कि अ व और व ह का धरातल बराबर होगा अ ह पर के वर्ग के ज ह को बढ़ाओ कि वह स द से क पर मिले

अब चूंकि अ स रेखा य बिंदु पर दो बराबर हिस्सों में बंटी है और फ़ तक बढ़ायी गयी है

इसलिये स फ़ और फ़ अ का धरातल और अ य पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं फ़ य पर के वर्ग के २-सा० ६

लेकिन य फ़ बराबर है य व के

इसलिये स फ़ और फ़ अ का धरातल और अ य पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं य व पर के वर्ग के

लेकिन व अ और अ य पर के वर्ग मिलकर बराबर हैं य व पर के वर्ग के १-सा० ४०

इसलिये स फ़ और फ़ अ का धरातल और अ य पर का वर्ग मिलकर बराबर हैं व अ और अ य पर के वर्गों के

इन दोनों बराबरों में से अ य पर का वर्ग निकाल डाला

इसलिये स फ़ और फ़ अ का धरातल बराबर है अ व पर के वर्ग के १-स्व० ३

लेकिन फ़ क क्षेत्र स फ़ और फ़ अ का धरातल है क्योंकि

फ़ अ बराबर है फ़ ज के और अ द क्षेत्र अ व पर का वर्ग है

इसलिये फ़ क बराबर है अ द के

अ क हिस्सा जो दोनों में शामिल है निकाल डाला

इसलिये बाकी ह फ़ बराबर है बाकी ह द के १-स्व० ३

लेकिन ह द क्षेत्र अ व और व ह का धरातल है क्योंकि

अ व बराबर है व द के



( १८७ )

और ह फ क्षेत्र अ ह पर का बर्ग है

इसलिये अ व और ब ह का धरातल बराबर है अ ह पर के बर्ग के

इसलिये अ व सीधी रेखा ह बिंदु पर ऐसी बटगयी कि अ व और ब ह का धरातल बराबर है अ ह पर के बर्ग के इसी रेखा के इस तरह बांटने की ज़रूरत थी

अनुमान १ इस साध्य में सफ रेखा अ पर उसी तरह से बट गयी है जैसे अब रेखा ह बिंदु पर बांटी गयी है

अनुमान २—अगर कोई सीधी रेखा दो ना बराबर हिस्सों में इस तरह बांटी जाय कि कुल सीधी रेखा और उसके छोटे हिस्से का धरातल बराबर हो बड़े हिस्से परके बर्गके तो बड़ा हिस्सा भी उसी तरह बांटा जासक्ता है अगर उसमें छोटे के बराबर हिस्सा काटा जाय और छोटा हिस्सा भी उसी तरह बट सक्ता है अगर छोटे हिस्से में से दोनों के अंतर के बराबर हिस्सा काटा जाय

टि०—ग्यारवीं साध्यमें उक्तै दस ने रेखागणित की रूसे बीजगणित के दूसरे दर्जे के समीकरण को हल किया है दूसरे दर्जे के समीकरण और इस साध्य का इलाका हमने इस जगह नहीं साबित किया क्योंकि विद्यार्थी जिसने बीजगणित को दूसरे दर्जे के समीकरण तक नहीं सीखा है उसको बखूबी नहीं समझ सक्ता है

## अभ्यास

( ३१ ) किसी सीधी रेखा को इतना बढ़ाओ कि कुल बढ़ी हुई सीधी रेखा और उसके बढ़े हुए हिस्से का धरातल बराबर हो उस रेखा परके बर्गके

( ३२ ) अगर कोई सीधी रेखा दो हिस्सों में इस तरह बांटी जाय जैसे कि ग्यारवीं साध्य में बांटी गयी है तो दोनों हिस्सों के बर्गका अन्तर बराबर होगा दोनों हिस्सों के धरातल के

( ३३ ) ११वीं साध्य में ज व और फ द और अ क रेखा आपस में खमानान्तर है

( १८८ )

( ३४ ) ग्यारहवीं साधामें अगर सह रेखा बढ़कर बफ से ल बिन्दु पर मिले तो सल फ समकोन है

( ३५ ) ग्यारहवीं साधामें अगर बय और सह रेखा न बिन्दु पर मिलें तो अ न रेखा सह रेखा के साथ समकोन बनावगी

( ३६ ) अगर अब रेखा स बिन्दु पर ऐसे दो हिस्सों में अ स और स ब में बांटौ गई हो कि अब और ब स का घरातल बराबर हो अ स परके बर्ग के तो साबित करो कि अब और ब स परके बर्गों का योग त्रिगुना होगी अ स परके बर्ग का और अब और ब स के योग परका बर्ग पांचगुना होगी अ स परके बर्ग का

( ३७ ) अब स समकोन त्रिभुज है जिसके ब स कर्ण पर अ द लम्ब डाला गया है और जिस की अब बढ़ी भुजा परका बर्ग बराबर है ब स और अ स के घरातल के साबित करो कि ब स करण द बिन्दु पर कटता है जैसा कि दूसरे अध्याय की ११वीं साध में होता है

( ३८ ) अब स समत्रिभुज है जिसके अब बढ़े हुए भुजा पर द एक ऐसी बिंदु है कि स द रेखा परका बर्ग दूना है अब परके बर्ग का साबित करो कि अ द बिंदु ब पर मिसल ११वीं साध्य के कटेगी

( ३९ ) अब स समकोन त्रिभुज है जिसका अ कोन समकोन है और जिसकी अब भुजा अ स भुजा से दूनी है अगर अब में से सह बराबर ब स और अ स के अन्तर के काटी जावे तो अब बिंदु ह पर मिसल ११वीं साध के कटेगी

## साध १२-प्रमेयोपपाद्य

सा०स०-अगर अधिक कोन त्रिभुज के किसी न्यून कोन से उस सामने की बढ़ी हुई भुजा पर लंब डाला जाय तो अधिक कोन के सामने के भुजा परका बर्ग उन दो भुजाओं परके बर्गों से जिनसे अधिक कोन बनता है बड़ा होगी बकदर उस घरातल के दूने के जो उस भुजा जिसके बढ़े हुए हिस्से पर लंब गिरा है और उस रेखा से बनता है जो दर्मियान लंब और अधिक कोन के है

( १८८ )

वि०सू०-फर्जकरो कि अबस अधिक कोन त्रिभुज

है जिसका अस व अधिक कोन है और अ बिंदु से अ द लंब व स बढ़ी हुई भुजा पर डाला गया है तो अब परका बर्ग बढ़ा होगा अस और स व परके बर्गों से बकदूर व स और स द के



दूने धरातल के

उप० चूंकि ब द रेखा दो हिस्सों में स बिंदु पर बांटी गयी है

इसलिये ब द परका बर्ग बराबर है व स और स द परके बर्गों के और व स और स द के दूने धरातल के २-सा०४

इन दोनों बराबरों में से हर एक में द अ परका बर्ग मिलाया

इसलिये ब द और द अ परके बर्ग मिलकर बराबर हैं व स, स द और द अ परके बर्गों और व स और स द के दूने धरातल के १-स्व०२

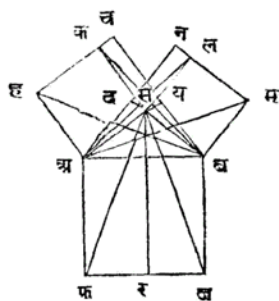
लेकिन व अ परका बर्ग बराबर है व द और द अ परके बर्गों के और स अ परका बर्ग बराबर है स द और द अ परके बर्गों के १-सा०४७

इसलिये व अ परका बर्ग बराबर है व स और स अ परके बर्गों और व स और स अ के दूने धरातल के यानी व अ परका बर्ग बढ़ा है व स और स अ परके बर्गों से बकदूर व स और स द के दूने धरातल के

फल-इसलिये अगर अधिक कोन त्रिभुज आयोपान्त- यही साबित करना था

टि०-यह साध्या पहले अध्याय से इस तरह साबित होती है

त्रिभुज अबस की भुजों पर अज, अक और बल बर्ग बनाओ (१-सा०४६) और सर, बच और अन लंब उन बर्गों की भुजों पर डालो और हव, सफ, अ म, अ ल, वक और सज मिलाओ



( २०० )

अब ठीक उसी तरह जैसा कि पहले अध्याय की सैंतालीसवीं साधना में साबित हुआ है साबित होसक्ता है कि त्रिभुज अस बराबर है त्रिभुज अह व के और त्रिभुज सब ज बराबर है त्रिभुज सब अ के और त्रिभुज ल स अ बराबर है त्रिभुज ब स क के इसलिये आयत अर बराबर है आयत अ च के और आयत ब र बराबर है आयत ब न के और आयत स च बराबर है आयत स न के ( १-सा०४१ वस्व० ६ ) इसलिये अज बराबर है अच और ब न के योग के लेकिन अज वर्ग अ व परका है और अ च और ब न मिलकर बराबर हैं अ क और ब ल वर्गों के और आयत स न और स च के योग के जो अस और ब स परके वर्ग और दूने धरातल ब स और स द हैं इसलिये अ व परका वर्ग अस और ब स परके वर्गों से बक़्दर दूने धरातल ब स, स द के ज़्यादा है

अनुमान— अगर लख अ और व कोनों से सामने की भुजों पर डाले जाय और उन भुजों से द और य बिंदुओं पर मिलें तो धरातल अस, स य बराबर है धरातल ब स, स द के

### बीजगणितीय साधन

फ़र्ज करो कि ब स, स अ और अ व लम्बाई में क्रम से अ, व और स पैमाने हैं और स द और द अ लम्बाई में म और न पैमाने हैं

तो ब द लम्बाई में (अ + म) पैमाने हैं

इसलिये  $\overset{२}{स} = (\overset{२}{अ} + \overset{२}{म}) + \overset{२}{न}$  क्योंकि अ व द समकोन त्रिभुज है

और  $\overset{२}{ब} = \overset{२}{म} + \overset{२}{न}$  क्योंकि अ स द समकोन त्रिभुज है

इसलिये  $\overset{२}{स} - \overset{२}{ब} = (\overset{२}{अ} + \overset{२}{म}) - \overset{२}{म}$   
 $= \overset{२}{अ} + \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म} + \overset{२}{म} - \overset{२}{म}$

$= \overset{२}{अ} + \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म}$

इसलिये  $\overset{२}{स} = \overset{२}{अ} + \overset{२}{ब} + \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म}$

यानी स बड़ा है अ + ब से बक़्दर  $\overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म}$  के

### अभ्यास

( ४० ) अगर किसी त्रिभुज का अस व अधिक कोन समतिबाहु त्रिभुज

( २०१ )

के एक कोन से दूना हो तो उसके अ व भुज पर का वर्ग व स और स अ भुजों के वर्गों से बक़्दर व स और स अ के धरातल के अधिक होगा

( ४१ ) त्रिभुज अ स व समबिबाहु है अ द रेखा ऐसी खींची गयी है जो व स बड़ी हुई से द बिंदु पर मिलती है कि व द और द स का धरातल बराबर है त्रिभुज अ व स के किसी भुज पर के वर्ग के साबित करो कि अ द पर का वर्ग दूना है त्रिभुज अ व स के किसी भुज परके वर्गका

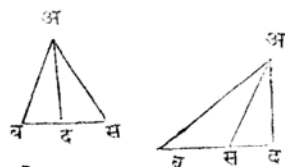
( ४२ ) ऐसा समबिबाहु अधिक कोन त्रिभुज बनाओ कि अधिक कोन के सामने की भुज परका वर्ग उसकी हर भुज पर के वर्ग से तिगुना हो

### साध्य १३ प्रमेयोपपाद्य

सा० सू० किसी त्रिभुज के किसी न्यूनकोन के सामने की भुज पर का वर्ग उन दो भुजों पर के वर्गों से जिनसे वह न्यूनकोन बनता है बक़्दर उस धरातल के दूने के जो उन भुजों में से किसी भुज और उस रेखा से बनता है जो दर्भियान न्यूनकोन और उस लंब के है जो उस भुज पर उसके सामने के कोन से डाला गया है

वि० सू० फर्ज करो कि अवस त्रिभुज है और उसका व न्यूनकोन है और उसकी भुज व स या व स भुज बड़ी हुई पर उसके सामने के अ कोन से अ द

लंब डाला गया है तो अ स भुज पर का वर्ग जो व कोन के सामने



है स व और व अ परके वर्गों से छोटा होगा बक़्दर

स व और व द के दूने धरातल के

उप० चूंकि स व रेखा द बिंदु पर और व द रेखा स बिंदु पर बांटी गयी है

इसलिये स व और व द परके वर्ग मिलकर बराबर हैं स व और व द के दूने धरातल और स द परके वर्ग के

इन दोनों बराबरों में से हर एक में अ द पर का वर्ग मिलाया





( २०३ )

अब ठीक उसी तरह जैसाकि पहले अध्याय की सैंतालीसवीं साध्य में साधित हुआ है साबित हो सक्ता है कि त्रिभुज व फ स, व अ ज और अ व क क्रम से बराबर हैं त्रिभुज ह स अ, म अ स और ल व स के इसलिये आद्यत स र, र अ और व न क्रम से बराबर हैं आद्यत स च, अ न और व न के (१-सा० ४१ व खा०-६) इसलिये स र और व अ मिलकर यानी कुल स ज बराबर है स च और अ न के योग की और व च और व न मिलकर दूने हैं व च के इसलिये स ज छोटा है स क और अ ल के योग से बक़्दर आद्यत व च के दूने की लेकिन स ज, स क और अ ल क्रम से अ स, स व और व अ पर के बर्ग हैं और व च घरातल व स-व द है क्योंकि व स बराबर है व क के इसलिये अ स पर का बर्ग अ व और व स पर के बर्गों के योग से बक़्दर दूने घरातल व स और स द के छोटा है

टि० २ बारहवीं और तेरहवीं साध्यों की दावे एकही दावे में इस तरह बयान होते हैं कि त्रिभुज की एक भुज परका बर्ग और दोनों भुजों परके बर्गों के योग का अन्तर बराबर है उस घरातल के दूने की जो इन दो भुजों में से किसी भुज और उस रेखा से बनता है जो बीच उस कोन जिसके गिर्द वह दोनों भुज है और लम्ब के है जो उस भुज पर उसके सामने के कोन से डाला गया है

टि० ३ इस अध्याय की बारहवीं और तेरहवीं साध्य और पहले अध्याय की सैंतालीसवीं साध्य क्रम से अधिककोन त्रिभुज न्यूनकोन त्रिभुज और समकोन त्रिभुजों की भुजों के आपस की सम्बन्ध बयान और साबित करती हैं पहले अध्याय की सैंतालीसवीं साध्य का प्रतिलोम उक्त इस ने उसी अध्याय की अड़तालीसवीं साध्य में साबित किया है लेकिन दूसरे अध्याय की बारहवीं और तेरहवीं साध्य के प्रतिलोम उक्त इस ने नहीं साबित किये हैं वह यह है कि “अगर त्रिभुज की किसी भुज पर का बर्ग उस की बाकी भुजों पर के बर्गों से बड़ा हो तो उस भुज के सामने का कोन अधिककोन होगा और अगर त्रिभुज की किसी भुज परका बर्ग बाकी भुजों पर के बर्गों से छोटा हो तो उस भुज के सामने का कोन न्यूनकोन होगा” इन प्रतिलोम का यह सूत्र है

फ़र्ज करो कि अ व स त्रिभुज में अगर अ व पर का बर्ग अ स और स व पर के बर्गों से बड़ा है तो अ स व अधिक कोन है और अगर छोटा है तो अ स व न्यूनकोन है



स से स द रेखा स व के साथ समकोन बनायी हुई खींची

( १-सा० ३१ )

( २०४ )

और स द बराबर स अ क बनाओ और व द मिलाओ

चूँकि व स द समकोन है इसलिये व स और स द पर की वर्ग मिलकर बराबर हैं व द पर की वर्ग की (१-सा० ४०) लेकिन व स और स द पर की वर्ग मिलकर बराबर हैं व स और स अ पर की वर्गों की क्योंकि स द बराबर स अ की बनायी गयी है इसलिये व द पर का वर्ग बराबर है व स और स अ पर की वर्गों की

अगर व अ पर का वर्ग बड़ा है व स और स अ पर की वर्गों से तो वह व द पर की वर्ग से भी बड़ा है और वह छोटा है व स और स अ पर की वर्गों से तो वह व द पर की वर्ग से भी छोटा है

फ़र्ज करो कि व अ परका वर्ग बड़ा है व स और स अ परकी वर्गों से इसलिये व अ परका वर्ग बड़ा है व द पर की वर्ग से इसलिये व अ बड़ी है व द से

चूँकि अ व स त्रिभुज की दो भुज अ स और स व अलग २ बराबर हैं द स व त्रिभुज की दो भुजों द स और स व की दानी अ स बराबर है द स की और स व दोनों में शामिल है लेकिन अ स व त्रिभुज का अ व आधार बड़ा है द स व त्रिभुज के द व आधार से इसलिये अ स व कोन बड़ा है द स व कोन से (१-सा० २५) लेकिन द स व समकोन है इसलिये अ स व अधिककोन है

फ़िर फ़र्ज करो कि व अ परका वर्ग छोटा है व स और स अ परकी वर्गों से इसलिये व अ परका वर्ग छोटा है व द परकी वर्ग से इसलिये व अ छोटी है व द से

चूँकि अ स व त्रिभुज की दो भुज अ स और स व अलग २ बराबर हैं द स व त्रिभुज की दो भुजों द स और स व की दानी अ स बराबर है द स की और स व दोनों में शामिल है लेकिन अ स व त्रिभुज का अ व आधार छोटा है द स व त्रिभुज के द व आधार से इसलिये अ स व कोन छोटा है द स व कोन से (१-सा० २५) लेकिन द स व समकोन है इसलिये अ स व न्यूनकोन है

## बीजगणितीय साधन

फ़र्ज करो कि व स, स अ और अ व लम्बाई में क्रम से अ, व और स पैमाने हैं और व द और अ द लम्बाई में स और न पैमाने हैं

पहली भूत देखो-अ व द स लम्बाई में (अ स) पैमाने हैं

( २०५ )

चूँकि  $\overset{२}{स} = \overset{२}{म} + \overset{२}{न}$  क्योंकि अ द व समकोन है

और  $\overset{२}{व} = \overset{२}{न} + (\overset{२}{अ-म})$  क्योंकि अ द स समकोन है

इसलिये  $\overset{२}{स} - \overset{२}{व} = \overset{२}{म} - (\overset{२}{अ-म})$

$$= \overset{२}{म} - \overset{२}{अ} + \overset{२}{२अ} \times \overset{२}{म-म}$$

$$= -\overset{२}{अ} + \overset{२}{२अ} \times \overset{२}{म}$$

इसलिये  $\overset{२}{अ} + \overset{२}{स} = \overset{२}{व} + \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म}$

यानी ब छोटा है अ + स से बकुदर  $\overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म}$  के

दूसरी सूरत देखा - अब द स लम्बाई में ( म-अ ) पैमाने है

चूँकि  $\overset{२}{स} = \overset{२}{म} + \overset{२}{न}$  क्योंकि अ द व समकोन है

और  $\overset{२}{व} = (\overset{२}{म-अ}) + \overset{२}{न}$  क्योंकि अ द स समकोन है

इसलिये  $\overset{२}{स} - \overset{२}{व} = \overset{२}{म} - (\overset{२}{म-अ})$

$$= \overset{२}{म} - \overset{२}{म} + \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म-अ}$$

$$= \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म-अ}$$

इसलिये  $\overset{२}{अ} + \overset{२}{स} = \overset{२}{व} + \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म}$

यानी व छोटा है अ + स से बकुदर  $\overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{म}$  के

तीसरी सूरत देखो - इस सूरत में म बराबर है अ के

और  $\overset{२}{व} + \overset{२}{अ} = \overset{२}{स}$

इन दोनों बराबरों में से हर एक में अ मिलाया

इसलिये  $\overset{२}{व} + \overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} = \overset{२}{अ} + \overset{२}{स}$

यानी व छोटा है अ + स से बकुदर  $\overset{२}{२} \times \overset{२}{अ} \times \overset{२}{अ}$

( २०६ )

## अभ्यास

( ४३ ) अब स समदिवाहु त्रिभुज के अब व्याधार परके किसी अ कोन से उसके सामने की भुज व स पर अ द लम्ब डाला गया है साबित करो कि अब परका वर्ग दूना है सब और व द के धरातल का

( ४४ ) अब स त्रिभुज का स समकोन है और अस के किसी द बिंदु से द य लम्ब अब पर डाला गया है तो साबित करो कि अब और अ य का धरातल बराबर है अस और अ द के धरातल के

( ४५ ) अब स द समलम्ब चतुर्भुज की अब और स द भुज समानान्तर हैं साबित करो कि अस और व द कर्णों पर के वर्ग मिलकर बराबर है अ द और व स पर के वर्गों और अब और स द के होने धरातल के

अगर अ य स त्रिभुज का अ द व कोन समदिवाहु त्रिभुज के कोन के बराबर हो तो अब परका वर्ग अस और व स पर के वर्गों से बड़ा व स और अ स के धरातल के बराबर होगा

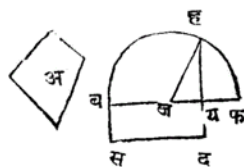
## सामर १४-वस्तुपपाद्य

सा० १४—दो सम त्रिभुज क्षेत्र की बराबर वर्ग बनाओ

विचार—कहाँ करो कि अ दिया हुआ

चतुर्भुज क्षेत्र है इस के बराबर वर्ग बना-  
ना है

अं०—अ के बराबर व स द य समकोन  
समानान्तर चतुर्भुज बनाओ (१सा० ४५)



अब अगर इस समानान्तर चतुर्भुज की व य और य द भुज आपस में बराबर हैं तो यह वर्ग क्षेत्र है और हमारा मतलब पूरा हो गया

अगर व य और य द बराबर नहीं हैं तो उन में से एक व य को फ तक बढ़ाओ और य फ बराबर य द के बनाओ

व फ की ज बिंदु पर दो बराबर हिस्सों में बांटी (१सा० १०)

ज केन्द्र से ज व या ज फ दूरी पर व ह फ अर्द्धवृत्त खींचो

( २०७ )

और **दृ** **य** को इतना बढ़ाओ कि वह **हृ** बिंदु पर परिधि से मिले तो **य** **हृ** पर जो बर्ग बनाया जायगा बराबर हीगा दिये हुए **अ** ऋजुभुज क्षेत्र के

**ज** **हृ** मिलाओ

उप०—चूँकि **व** **फ** रेखा **ज** बिंदु पर दो बराबर हिस्सों में और **य** पर दो नाबराबर हिस्सों में बांटी गयी है

इसलिये **व** **य** और **य** **फ** का धरातल और **य** **ज** पर का बर्ग मिलकर बराबर हैं **ज** **फ** पर के बर्ग के (२-सा० ५)

लेकिन **ज** **फ** बराबर है **ज** **हृ** के (१-प० १५)

इसलिये **व** **य** और **य** **फ** का धरातल और **य** **ज** पर का बर्ग मिलकर बराबर हैं **ज** **हृ** पर के बर्ग के

लेकिन **हृ** **य** और **य** **ज** पर के बर्ग मिलकर बराबर हैं **ज** **हृ** पर के बर्ग के (१-सा० ४७)

इसलिये **व** **य** और **य** **फ** का धरातल और **य** **ज** पर का बर्ग मिलकर बराबर हैं **हृ** **य** और **य** **ज** पर के बर्गों के

**य** **ज** पर का बर्ग जो इन दोनों में शामिल है निकाल डाला इसलिये **व** **य** और **य** **फ** का धरातल बराबर है **हृ** **य** पर के बर्ग के

लेकिन **व** **य** और **य** **फ** का धरातल **व** **दृ** समानांतर चतुर्भुज है क्योंकि **य** **फ** बराबर है **व** **दृ** के

इसलिये **व** **दृ** बराबर है **य** **हृ** पर के बर्ग के

लेकिन **व** **दृ** क्षेत्र **अ** ऋजुभुज क्षेत्र के बराबर बनाया गया है इसलिये **य** **हृ** पर का बर्ग बराबर है **अ** ऋजुभुज क्षेत्र के

इसलिये दिये हुए ऋजुभुज क्षेत्र के बराबर एक बर्ग बन गया जो **य** **हृ** पर बनाया जाय और इसी के बनाने की ज़रूरत थी

( २०८ )

**अनुमान—**इस साधन से साफ़ ज़ाहिर है कि अगर किसी वृत्त की परिधि के किसी बिंदु से उसके व्यास पर लंब डाला जाय तो उस लंब परका बर्ग बराबर होगा व्यास के हिस्सों के घरातल के जिनमें वह लंब से बांटा गया है

## अभ्यास

( ४७ ) दिए हुए बर्ग के बराबर एक आयत बनाओ जिसकी एक भुज दी हुई सीधी रेखा के बराबर हो

## दूसरे अध्यायकी साध्योंपर मिश्रितप्रश्न

( ४८ ) अगर कोई सीधी रेखा पांच बराबर हिस्सों में बांटी जाय तो कुल रेखा पर का बर्ग बराबर होगा उन दो रेखाओं पर के बर्गों के जो उन हिस्सों में से चार और तीन हिस्सों से बनते हैं

( ४९ ) दिये हुए त्रिभुज की किसी भुज को इतना बढ़ाओ कि उसभुज और बढ़े हुए हिस्से का घरातल बराबर हो बाकी दो भुजों परके बर्गों के अन्तर के

( ५० ) एक सीधी रेखा को ऐसे दो हिस्सों में बांटी कि कुल रेखा और उसके एक हिस्से परका बर्ग मिलकर दूने हों दूसरे हिस्से परके बर्ग के

( ५१ ) दी हुई सीधी रेखा को इतना बढ़ाओ कि उस रेखा परका बर्ग और बढ़े हुए हिस्से परका बर्ग मिलकर दूने हों उस घरातल के जो बढ़ी हुई रेखा और बढ़े हुए हिस्से से बनता है

( ५२ ) दी हुई सीधी रेखा को इतना बढ़ाओ कि दी हुई रेखा परका बर्ग और कुल बढ़ी हुई रेखा परका बर्ग मिलकर दूने हों उस घरातल के जो कुल बढ़ी हुई रेखा और बढ़े हुए हिस्से से बनता है

( ५३ ) अगर किसी अबसद समकोन समानान्तर चतुर्भुज के पास के अब और वस भुजों पर अबयफ और वसजह बर्ग बनाये जाय तो बर्गों के कर्ण वफ और वज का घरातल दूना होगा अबसद समकोन समानान्तर चतुर्भुज के

( ५४ ) चतुर्भुज के कर्णों परके बर्गों का योग दूना होगा उन रेखाओं परके बर्गों के योग से जो चतुर्भुज की आमने सामने की भुजों के बीचोंबीच के बिन्दुओं को मिलाती हैं

( ५५ ) अगर किसी अर्ध वृत्त के अब व्यास में ग एक बिंदु है और सद रेखा अ व के समानान्तर ऐसी खींची गई है कि उसके स और द सिरे वृत्त की परिधि पर हैं साबितकरो कि स ग और ग द परके बर्ग मिलकर बराबर हैं अ ग और ग व परके बर्गों के



( २०८ )

( ५६ ) उस बिंदु को जहाँ किसी समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण आपस में एक दूसरे को काटते हैं केन्द्र मानकर वृत्त खींचा गया है सावितकरो कि उन रेखाओं परके वर्गोंका योग जो वृत्त की परिधि के किसी बिंदु से समानान्तर चतुर्भुज के कोनों तक खींची गयी है हमेशाह एक ही मिलकर पड़ेगी

( ५७ ) किसी वृत्त के आस पास में स और द बिंदु उस के केन्द्र से बराबर दूरी पर लिये गये और परिधि के किसी बिंदु य से यस और यद रेखा खींची गई हैं सावितकरो कि यस और यद परके वर्ग मिलकर बराबर हैं अस और अद परके वर्गों के

( ५८ ) अबस समलंबाहु त्रिभुज में अद और बय भुज बस और सअ पर लम्ब हैं और एक दूसरे को बिंदु फ पर काटते हैं सावितकरो कि अब परका वर्ग तिगुना है अफ परके वर्गका

( ५९ ) अगर त्रिभुज की भुजों के बीचोंबीच के बिंदुओं से उनके सामने के कोनों तक रेखा खींची जायें तो इन रेखाओं परके वर्गों के योग का चौगुना बराबर होगा त्रिभुज की भुजों परके वर्गों के योग के तिगुने के

( ६० ) अगर दस और यअ और फव रेखा जो किसी अबस त्रिभुज के अब और बस और सअ भुजों के बीचों बीच के द और य और फ बिंदुओं से उन भुजों के सामने के कोनों तक खींची गई हैं ज बिंदु पर मिलें सावितकरो कि जअ और जव और जस परके वर्गोंके योगका तिगुना बराबर है अब और बस और सअ परके वर्गोंके योगके

( ६१ ) वर्ग क्षेत्र के भीतर जो सब से छोटा वर्ग बनेगा वह उस वर्गका आधा होगा

( ६२ ) एक दिखे हुए वर्ग के बराबर एक ऐसा समकोन समानान्तर चतुर्भुज बनाओ जिसकी दो पास के भुजों का योग एक दी हुई रेखा के बराबर हो

( ६३ ) एक दिखे हुए वर्ग के बराबर एक ऐसा समकोन समानान्तर चतुर्भुज बनाओ जिसकी पासकी दो भुजाओं का अन्तर एक दी हुई रेखा के बराबर हो

( ६४ ) अबसद समानान्तर चतुर्भुज का अगर अस कर्ण बराबर हो अब के तो अस कर्ण परका वर्ग वद कर्ण परके वर्ग से बस परके वर्ग के दूने के समान छोटा होगा

( ६५ ) अगर अबसद वर्ग के कोनों से अय और दह और बफ और सज लम्ब किसी यह फन रेखा पर गिराये जायें तो अय और

( २१० )

स ज परकी वर्ग मिलकर ब फ और द ह की धरातल की दूने से ब क द र  
अ व स द वर्ग की ब डें होंगे

( ६६ ) दिये हुए क्षेत्रफल की समकोन समानान्तर चतुर्भुज की भुजों-  
का योग उस स्वरुत में सब से छोटा होगा जब वह समकोन समानान्तर  
चतुर्भुज वर्ग है

( ६७ ) अगर अ और व और स और द बिंदु क्रम से एक ही सीधी  
रेखा में, हों तो अ व और स द का धरातल और व स और अ द का  
धरातल मिलकर बराबर है अ स और व द के धरातल के

( ६८ ) एक सीधी रेखा को इतना बढ़ाओ कि कुल सीधी रेखा बढ़ी  
हुई और किसी दूसरी दी हुई सीधी रेखा का धरातल बराबर हो बढ़े  
हुए हिस्से परकी वर्गकी

( ६९ ) दो समकोन समानान्तर चतुर्भुजों की क्षेत्रफल आपस में बराबर  
हैं और उनकी भुजों की योग भी आपस में बराबर है साबितकरो कि  
वह सब तरह से आपस में बराबर है

( ७० ) अगर किसी अ व स त्रिभुज के अ व आधार के म + न बरा-  
बर हिस्से किये जाय और अगर अ द में न हिस्से और व द में म हि-  
स्से हों तो साबितकरो कि

$$( ७१ ) \quad m \times \overset{2}{अस} + n \times \overset{2}{वस} = (m+n) \times \overset{2}{सद} + m \times \overset{2}{अद} + n \times \overset{2}{वद}$$

( ७२ ) अगर किसी अ व स त्रिभुज के अ व आधार के म - न बरा-  
बर हिस्से किये जाय और अगर व अ को द बिंदु तक इतना बढ़ाया  
जावे कि अ द में न हिस्से और व द में म हिस्से हों तो साबित-  
करो कि

$$( ७३ ) \quad m \times \overset{2}{अस} - n \times \overset{2}{वस} = (m-n) \times \overset{2}{सद} + m \times \overset{2}{अद} - n \times \overset{2}{वद}$$

( ७४ ) किसी दिये हुए ग बिंदु से एही तीन रेखा ग अ और ग व  
और ग स दी हुई लम्बाई की खींचो कि उनकी सिरे अ और व और स  
एक सीधी रेखा में हों और अ व बराबर हो व स के

( ७५ ) अगर किसी अ व स समकोन त्रिभुज के अ व कर्ण के द और  
द बिंदुओं पर तीन बराबर हिस्से किये जाय तो स द और स य और द य  
परकी वर्गों का तिगुना बराबर होगा अ व परकी वर्ग की दूने के

इति



( २११ )

## सवालात इम्तिहान

### दूसरा अध्याय

- ( १ ) दूसरे अध्याय में किन २ बातों पर बहस की गई है
- ( २ ) सापक की तारीफ़ करो—एकही समानान्तर चतुर्भुज में एकही बनावट में कितने सापक पैदा होते हैं—उन का फ़र्क़ बताओ
- ( ३ ) रेखागणित में दो या ज़्यादा सीधी रेखाओं के योग से क्या सुराद है
- ( ४ ) उकलेदस ने दूसरे अध्याय की पहली ८ साध्यों के तन्त्र में कौनसी स्वयंमिद्धि को मान लिया है
- ( ५ ) रेखा के अन्तः खंड और बहिः खंड से क्या सुराद है
- ( ६ ) अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर और दो नाबराबर हिस्सों में बहिः खंड या अन्तः खंड में बांटी जाय तो साबित करो कि सीधी रेखा के बाहिः खंडों का योग या अन्तः खंडों का अन्तर दूना है उस रेखा से जो भाग बिन्दुओं के बीच में है
- ( ७ ) अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर और दो नाबराबर हिस्सों में बांटी जाय तो साबित करो कि सीधी रेखा का वह भाग जो भाग बिन्दुओं के बीच में है नाबराबर हिस्सों के अन्तर के आधे के बराबर होगा
- ( ८ ) अगर दो नाबराबर सीधी रेखाओं के आधे योग में उन के अन्तर का आधा जोड़ दिया जाय तो योग बड़ी सीधी रेखा के बराबर होगा और अगर उन दोनों सीधी रेखाओं के आधे योग में से उन का आधा अन्तर घटा दिया जाय तो बाकी छोटी सीधी रेखा के बराबर होगा
- ( ९ ) साबित करो कि दूसरी और तीसरी साध्या पहली साध्या की खास मूरतें हैं
- ( १० ) दूसरी और तीसरी साध्या का एकही दावा लिखो
- ( ११ ) दूसरे अध्याय की चौथी साध्या को दूसरी और तीसरी साध्या की मदद से बग़ैर प्रकल खींचे हुए साबित करो
- ( १२ ) दूसरे अध्याय की चौथी साध्या की सहायता से पंद्रह अध्याय की ४७ वीं साध्या को साबित करो
- ( १३ ) साबित करो कि अगर दूसरे अध्याय की चौथी साध्या में दोनों पूरक मिलकर बराबर हों दोनों वर्गों के तो दी हुई सीधी रेखा दो बराबर हिस्सों में बंटेगी
- ( १४ ) एक सीधी रेखा को किस तरह बाँटें कि दोनों हिस्सों का प्रमाण समान बढ़ा हो

( २१२ )

( १५ ) दूसरे अध्याय की छठी साध पांचवीं साध की मदद से फौरन ही किस तरह साबित हो सकती है

( १६ ) चौथी और सातवीं साध का मुकाबिला करो

( १७ ) साबित करो कि दो सीधी रेखाओं के योग पर का बर्ग उनके अन्तर पर के बर्ग से बक़्दर उनके चौगुने घरातल के बड़ा होता है

( १८ ) रेखागणित की सहायता से साबित करो कि दो सीधी रेखाओं के योग और अन्तर पर के बर्ग उन सीधी रेखाओं पर के बर्गों से दूने होते हैं

( १९ ) एक त्रिभुज की भुज १३, १४, १५ हैं तो उन सीधी रेखाओं की लम्बाई बताओ जो उस त्रिभुज की भुजों के बीचों बीच के बिन्दुओं से उन भुजों के सामने के कोनों तक खींची जायगी और उस त्रिभुज के लम्बों की भी लम्बाई बताओ और यह भी साबित करो कि उस त्रिभुज के तीनों कोन न्यूनकोन हैं

( २० ) दूसरे अध्याय की ग्यारहवीं साध के व सीधी रेखा के सुता-बिक्र बांटो हुई और रेखाओं की कतार किस तरह दर्याफ्त कर सकते हैं

( २१ ) रेखागणित की ११ वीं साध में अ ब रेखा का छोटा हिस्सा दिया हुआ है तो बड़ा हिस्सा दर्याफ्त करो

( २२ ) पहले अध्याय की ४७ वीं साध और दूसरे अध्याय की १२, १३ साध का मुकाबिला करो

( २३ ) एक विषमकोन समचतुर्भुज (अ बर्ग) के कर्ण १६, १३ फीट हैं तो उसके किसी भुज की लम्बाई बताओ

( २४ ) किसी त्रिभुज की भुज ८, ११, १५ हैं तो साबित करो कि वह अधिककोन त्रिभुज है

( २५ ) किसी त्रिभुज की भुज ३, ४, ५ हैं तो बताओ कि कौन जो ३, ४ के दर्मियान और जो ४, ५ के दर्मियान और जो ५, ३ के दर्मियान है वह समकोन से बड़ा या बराबर या छोटा है

( २६ ) अगर दूसरे अध्याय की चौदहवीं साध में दिया हुआ ऋजुभुज क्षेत्र एक समकोन त्रिभुज हो जिसकी भुज ८, ६ हैं तो बताओ कि उस बर्ग की भुज कितनी होगी जिसका क्षेत्रफल उस त्रिभुज के बराबर है और यह भी साबित करो कि बर्ग की भुजों का योग त्रिभुज की भुजों के योग से छोटा होगा

( २७ ) “हर ऋजुभुज क्षेत्र के बराबर बर्ग बना सकते हैं” उन उन कायदों को जिनकी सहायता से उर्कै दस ने दर्ज व दर्ज दस साध को साबित किया है बताओ

( २१३ )

## मज्झम के सुताविक रेखागणित के पहली और दूसरे अध्याय की साध्यों की फहरिस्त

साध्य प्रमेयोपपाद

कौन जो सीधी रेखाओं के आपस में कटने से बनते हैं।

नम्बर साध्य	कल्पित अर्थ	फल
११ अनुमान	अगर दो रेखा ऐसी हैं कि वह सीधी हैं	उन का कोई हिस्सा उभयनिष्ठ नहीं होसक्ता
१३	अगर एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी होकर दो कोन बनावे	यह कोन या तो दोनों समकोन होंगे या मिलकर बराबर दो सम कोन के होंगे
१४	अगर दो सीधी रेखा किसी तीसरी सीधी रेखा की व्यामने सामने की तर्फों से आकर एक ही बिन्दु पर मिले और व्यामन्न कोन बराबर दो समकोन के बनावे	यह दोनों सीधी रेखा एकही सीधी रेखा यानी एकही सीध में होंगी
१३ अनुमान	अगर दो सीधी रेखा आपस में किसी बिन्दु पर कटे	चार कोन जो उस बिन्दु पर बनेंगे मिलकर बराबर चार समकोन के होंगे
१५	अगर दो सीधी रेखा आपस में किसी बिन्दु पर कटे	सन्मुख के कोन आपस में बराबर होंगे
१५ प्रतिलोम	अगर चार सीधी रेखा आपस में किसी बिन्दु पर मिलकर सन्मुख कोन बराबर बनावे	पहली सीधी रेखा तीसरी सीधी रेखा की सीध में होगी और दूसरी चौथी की
१३ अनुमान	अगर कोई सीधी रेखा किसी सीधी रेखा के एक तरफ से आकर उस के किसी बिन्दु पर जो उस के सिरे का नहीं है मिले और कोन बनावे	उस बिन्दु पर के सब कोन मिलकर दो समकोन के बराबर होंगे
१३ अनुमान	अगर एक बिन्दु से कई सीधी रेखा निकले	कोन जो उन रेखाओं से उस बिन्दु पर बनेंगे मिलकर बराबर चार समकोन के होंगे

( २१८ )

## समानान्तर सीधी रेखा

नम्बर साथ	कल्पित अर्थ	फल
२७	अगर एक सीधी रेखा किसी दो सीधी रेखाओं पर जो एक ही धरातल में है गिरकर समानान्तर कोन बराबर बनावे	यह दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी
२८ पहला हिस्सा	अगर एक सीधी रेखा किसी दो सीधी रेखाओं पर जो एक ही धरातल में है गिरकर बहिः कोन अपने आमने सामने के अंतः कोनों के बराबर बनावे	यह दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी
२८ दूसरा हिस्सा	अगर एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर जो एक ही धरातल में है गिरकर अपनी एक तरफ के दो अंतः कोन ऐसे बनावे कि वह मिलकर दो समकोन के बराबर हों	यह दोनों सीधी रेखा समानान्तर होंगी
२९ पहला हिस्सा	अगर एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं पर गिरे	वह रेखा उन रेखाओं के साथ एकान्तर कोन बराबर बनावेगी
२९ दूसरा हिस्सा	अगर एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं पर गिरे	वह अपनी एक तरफ का बहिः कोन और उस के सामने का अंतः कोन एक दूसरे के बराबर बनावेगी
२९ तीसरा हिस्सा	अगर एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं पर गिरे	वह अपनी एक तरफ के दो अंतः कोन ऐसे बनावेगी कि वह मिलकर बराबर दो समकोन के होंगे
३०	अगर दो सीधी रेखाओं में से छर एक किसी तीसरी सीधी रेखा के समानान्तर है	वह दोनों सीधी रेखा आपस में भी समानान्तर होंगी



( २१५ )

तत्त्वरसाध्य	कल्पितार्थ	फल
३३	अगर दो सीधी रेखा किसी दो बराबर और समानान्तर सीधी रेखाओं के एक २ तरफ़ के सिरे को मिलावे	वह दोनों सीधी रेखा भी आपस में बराबर और समानान्तर होंगी

### त्रिभुजों की बराबरी के लिये सुकाविला करना

७	अगर दो त्रिभुज एकही आधार पर और उसकी एकही तरफ़ में हों	सुमकिन नहीं कि उनकी वह भुज जिनके सिरे आधार के एक सिरे पर हों आपस में बराबर हों और वह भुज जिन के सिरे आधार के दूसरे सिरे पर हों आपस में बराबर हों
३२ अनुमान	अगर एक त्रिभुज के दो कोन दूसरे त्रिभुज के दो कोनों के बराबर हों	उस त्रिभुज का तीसरा कोन भी दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोन के बराबर होगा
२६	अगर एक त्रिभुज के दो कोन दूसरे त्रिभुज के दो कोनों के अलग २ बराबर हों और एक २ भुज भी उन त्रिभुजों की बराबर हों खास्य यह भुज बराबर कोनों के दमियानकी हों या उनके सामने की हों	बाकी कोन और भुज भी उन त्रिभुजों की अलग २ बराबर होंगी और त्रिभुज भी आपस में बराबर होंगे
८	अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग २ बराबर हों और उनके आधार भी आपस में बराबर हों	आधारों के सामने के कोन आपस में बराबर होंगे और बराबर भुजों के सामने के कोन भी आपस में बराबर होंगे और दोनों त्रिभुज भी आपस में बराबर होंगे
२४	अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग २ बराबर हों लेकिन एक त्रिभुज का आधार दूसरे त्रिभुज के आधार से बड़ा हो	बड़े आधार के सामने का कोन छोटे आधार के सामने के कोन से बड़ा होगा

( २१६ )

नम्बर साध्य	कल्पित अर्थ	फल
४	अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुजकी दो भुजों के अलग २ बराबर हों और उन भुजोंसे बने हुए कोनभी आपसमें बराबर हों	त्रिभुजों के आधार आपस में बराबर होंगे और आधारों परके कोन जिनके सामने के भुज बराबर हैं आपस में बराबर होंगे और त्रिभुज बराबर होंगे
२४	अगर एक त्रिभुज की दो भुज दूसरे त्रिभुज की दो भुजों के अलग २ बराबर हों लेकिन एक त्रिभुज के उन भुजों से बना हुआ कोन दूसरे की उन भुजों से बने हुए कोन से बड़ा हो	बड़े कोन के सामने का आधार छोटे कोन के सामने के आधार से बड़ा होगा
३७	अगर त्रिभुज एक आधार पर एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों	उन त्रिभुजों के रकबे बराबर होंगे
३८	अगर त्रिभुज बराबर आधारों पर एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों	उन त्रिभुजों के रकबे बराबर होंगे
३९	अगर बराबर त्रिभुज एकही आधार पर और उस के एकही तरफ में हों	वह त्रिभुज एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान होंगे
४०	अगर बराबर त्रिभुज एकही सीधी रेखा के बराबर आधारों पर और उस की एकही तरफ हों	वह त्रिभुज एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान होंगे
३७ व ३८ प्रतिलोम	अगर बराबर त्रिभुज एक ही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हैं	वह त्रिभुज या तो एकही आधार पर या बराबर आधारों पर होंगे

( २१० )

नम्बर साथ	कल्पित अर्थ	फल
तथा	अगर अराधन भुज बढ़ायी जाय	आधार के नीचे के कोण आसन्न से बराबर होगे
२२ अनुमान	अगर त्रिभुज समकोण बनवाया हुआ है	आधार पर का हर एक कोण आधा समकोण है
१८	अगर किसी त्रिभुज की एक भुज दूसरी भुज से बड़ी है	बड़ी भुज के सामने का कोण छोटी भुज के सामने के कोण से बड़ा होगा
५ अनुमान	अगर त्रिभुज समबिबाहु है	वह त्रिभुज समान कोण भी है
३२ अनु० ६	अगर त्रिभुज समबिबाहु है	उस का हर एक कोण समकोण का दो तिहाई है
६ अनुमान	अगर त्रिभुज समान कोण है	वह त्रिभुज समबिबाहु भी है
१६	अगर त्रिभुज की एक भुज बढ़ायी जाय	बहिः कोण अपने सामने की हर एक अंतः कोण से बड़ा होगा
७२ पहला हिस्सा	अगर त्रिभुज की एक भुज बढ़ायी जाय	बहिः कोण अपने सामने के दोनों अंतः कोणों के बराबर होगा
७०	अगर त्रिभुज समकोण है	वर्ग की समकोण के सामने की भुज पर बनाया जायगा परावर होगा
७५	अगर त्रिभुज की एक भुज पर का बनाया हुआ वर्ग बराबर है उस वर्ग के जो बाकी भुजों पर बनाये गये हैं	उस वर्ग के जो बाकी भुजों पर बनाये जायेंगे
७५	अगर त्रिभुज की एक भुज पर का बनाया हुआ वर्ग बराबर है उस वर्ग के जो बाकी भुजों पर बनाये गये हैं	उस भुज के सामने का कोण समकोण है
१० अध्याय ० प्रतिलोम	अगर किसी त्रिभुज की किसी भुज पर का बनाया हुआ वर्ग बड़ा है बाकी दो भुजों पर बनाये हुए वर्गों के योग से	उस भुज के सामने का कोण अधिक कोण है
११ अध्याय ० प्रतिलोम	अगर त्रिभुज की किसी भुज पर का बनाया हुआ वर्ग छोटा है बाकी दो भुजों पर के बनाये हुए वर्गों के योग से	उस भुज के सामने का कोण कम कोण है

( २१८ )

## सीधी रेखा जो त्रिभुज के अन्दर खींची जायं

नम्बरसाध्य	कल्पित अर्थ	फल
३८ अद्भुतमान	अगर त्रिभुज की किसी भुज के बीचों बीच के बिन्दु से उस के सामने के कोन तक रेखा खींची जाय	वह सीधी रेखा त्रिभुज को दो बराबर हिस्से करेगी
२१	अगर त्रिभुज के आधार के किरीं से दो रेखा किसी बिन्दु तक जो त्रिभुज के अन्दर है खींची जायं	यह दोनों रेखा मिलकर त्रिभुज की बाकी भुजों से छोटी होंगी लेकिन रेखाओं से बना हुआ कोन भुजों से बने हुए कोन से बड़ा होगा
२२ अद्भुतमान	अगर त्रिभुज की उन भुजों में से जो अधिक कोन के गिराई है किसी भुज बढ़ी हुई पर उस के सामने के कोन से लंब गिराया जाय	अधिक कोन के सामने की भुज पर का बर्ग बाकी दो भुजों पर के बर्गों के योग से बड़ा होगा कदर उस घरातल के दूने के जो उस भुज से जिस पर लंब गिराया गया है और उस के उस बढ़े हुए हिस्से से जो दर्मियान अधिक कोन और लंब की है बनता है
२३ अद्भुतमान	अगर किसी त्रिभुज की उन भुजों में से जो न्यून कोन के गिराई है किसी भुज या उस बढ़ी हुई भुज पर उस के सामने के कोन से लंब गिराया जाय	उस न्यून कोन के सामने की भुज पर का बर्ग छोटा होगा बाकी दो भुजों पर के बर्गों के योग से बकदर उस घरातल के दूने के जो उस भुज से जिस पर लंब गिराया गया है और उस रेखा से जो उस न्यून कोन और लंब के दर्मियान है बनता है

## समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज का मुकाबिला

४१	अगर समान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज एक ही आधार और एक ही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों	समानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज से दूना होगा
४२ अनुमान	अगर समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज बराबर	समानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज के दूना होगा

( २१८ )

नम्बर साध्य	कल्पित अर्थ	फल
४१ प्रतिलो- म १	बराबराधारों पर एक- ही समानान्तर रेखा- ओं के दर्मियान हों अगर समानान्तर चतु- र्भुज और त्रिभुज एक ही आधार पर या एक ही सीधी रेखा के ब- राबर आधारों पर हों और समानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज से दूना हो	समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज एकही समानान्तर रेखाओं के द- र्मियान होंगे
४२ प्रतिलो- म २	अगर समानान्तर चतु- र्भुज और त्रिभुज एक ही समानान्तर रेखा ओं के दर्मियान हों और समानान्तर चतु- र्भुज त्रिभुज से दूना हो	समानान्तर चतुर्भुज और त्रिभुज या तो एक ही आधार पर या बराबर आधारों पर होंगे

### समानान्तर चतुर्भुजों का बराबरी के लिये सुकाविला करना

३५	अगर समानान्तर चतु- र्भुज एकही आधारपर और एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान हों	वह समानान्तर चतुर्भुज आपस में बराबर होंगे
३५ प्रतिलोम	अगर बराबर समाना- न्तर चतुर्भुज एकही आधारपर और उसके एकही तरफ में हों	वह समानान्तर चतुर्भुज एकही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान होंगे
३६	अगर समानान्तर चतु- र्भुज बराबर आधारों पर और एकही समा- नान्तर रेखाओं के दर्मि- यान हों	वह समानान्तर चतुर्भुज आपस में बराबर होंगे
३६ प्रतिलोम	अगर बराबर समा- नान्तर चतुर्भुज एकही सीधी रेखा के बराबर आधारों पर एक ही तरफ में हों	वह समानान्तर चतुर्भुज एक ही समानान्तर रेखाओं के दर्मियान होंगे

( २२० )

नस्तर साध्य	कल्पित अर्थ	फल
३५ व ३६ प्रतिशोभ	अगर बराबर समानान्तर चतुर्भुज रखें तो समानान्तर रेखाओं के निर्माण होंगे	वह समानान्तर चतुर्भुज या तो एक ही आधार पर या बराबर आधारों पर होंगे

समानान्तर चतुर्भुज की भुजों दोनों और धरातलों के आपस के दूरातों

३७ प्रतिशो- भ १	अगर किसी चतुर्भुज की आसने आसने की भुज बराबर हों	वह चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज होगा
३८ प्रतिशो- भ २	अगर किसी चतुर्भुज की आसने आसने की कोन बराबर हों	चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज होगा
तथा ३	अगर किसी चतुर्भुज का हर एक कोन उसी धरातल की ही समान दिशा करें	वह चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज होगा
३८	अगर कोई चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हो	उसकी आसने आसने की भुज आपस में बराबर होंगी और उसकी आसने आसने की कोण भी बराबर होंगे और उसका हर कोन उसकी ही बराबर दिशा करेंगा
३९ चतुर्भुज	अगर समानान्तर चतुर्भुज का एक कोन समकोण है	उसकी मद कोन समकोण होंगे
४३	अगर समानान्तर चतुर्भुज की कर्णों में से दो को समानान्तर चतुर्भुज है	उसके दूसरे बराबर होंगे

आयतों का सुकानिवाली मोधी रेखा और उनके हिस्सों के बनते हैं

१ अथाप २	अगर कोई मोधी रेखा दो हिस्सों में बटी है	धरातलों को मोधी रेखा और उसकी धर एक हिस्से के मिलकर बराबर है कुल मोधी रेखा परकी बराबर है
२ अथाप २	अगर कोई मोधी रेखा दो हिस्सों में बटी है	धरातल को मोधी रेखा और उसके रखे हिस्से का धरातल है उक्त हिस्से परकी बराबर होंगे



( २२१ )

नख्खरसाध्य	कल्पित अर्थ	फल
४ अध्याय :	अगर कोई सीधी रेखा दो हिस्सों में बटी है	हिस्सों के धरातल के कुल सीधी रेखा परका बर्ग बराबर है दोनों हिस्सों परके बर्गों और उन हिस्सों के दूने धरातल के योग के तो कुल सीधी रेखा पर और उसके एक हिस्से परके बर्ग मिलकर बराबर है कुल रेखा और उस के उस हिस्से के दूने धरातल और दूसरे हिस्से परके बर्ग के
७ अध्याय :	अगर कोई सीधी रेखा दो हिस्सों में बटी है	कुल सीधी रेखा और उसके एक हिस्से का चौगुना धरातल और दूसरे हिस्से पर का बर्ग मिलकर बराबर है उस रेखा पर के बर्ग के जो सीधी रेखा के पहले हिस्से से बनती है
५ अध्याय :	अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर और दो बराबर हिस्सों में बटी है	धरातल दो बराबर हिस्सों पर और उस रेखा पर का बर्ग दो भाग बिंदुओं के बीच में है मिलकर बराबर है उस सीधी रेखा के आधे परके बर्ग के
६ अध्याय :	अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर और दो बराबर हिस्सों में बटी है	दो बराबर हिस्से परके बर्ग मिलकर दूने हैं सीधी रेखा के आधे पर और उस रेखा परके बर्ग के जो भाग बिंदुओं के दर्भिताने हैं
६ अध्याय :	अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर हिस्सों में बटी है और किसी बिंदु तक बढ़ा दी गयी है	कुल बढ़ी हुई सीधी रेखा और बढ़ी हुई हिस्से का धरातल और सीधी रेखा के आधे परका बर्ग मिलकर बराबर है उस रेखा पर के बर्ग के जो सीधी रेखा के आधे और बढ़ी हुई हिस्से से बनती है
१० अध्याय :	अगर कोई सीधी रेखा दो बराबर हिस्सों में बटी है और किसी बिंदु तक बढ़ा दी गयी है	बढ़ी हुई कुल सीधी रेखा पर और बढ़ी हुई हिस्से पर के बर्ग मिलकर दूने हैं सीधी रेखा के आधे पर और उस रेखा पर के बर्ग के जो आधी रेखा और बढ़ी हुई हिस्से से बनती है

( २२२ )

नम्बरसाध्य	कल्पित अर्थ	फल
१ अध्याय	अगर दो सीधी रेखाओं में से एक कई हिस्सों में बटी है	दो सीधी रेखाओं का घरातल बराबर है उन घरातलों के योग के जो कुल वे बटी रेखा और हर एक हिस्से बटी हुई से बनते हैं

### वज्रभुज क्षेत्र

३२ अनुमान १	अगर कोई ऋजुभुज क्षेत्र है	उसके सब अंतः कोन और चार समकोन मिलकर उतने समकोनों के बराबर होंगे जो गिनतीमें उस की भुजों की तादाद से दूने होंगे
३२ अनुमान २	अगर किसी ऋजुभुज क्षेत्र की सब भुज एक दूसरी की बाद एक ही दिशामें बढ़ायी जायं	सब वहिः कोन जो भुजों के बढ़ाने से बनेंगे मिलकर चार समकोन के बराबर होंगे

### साध्यवस्तुपपाद्य

नम्बरसाध्य	निदिष्ट	सीधी रेखा	करणीय
२	एक परिमिति सीधी रेखा और एक बिंदु	उस बिंदु से उस रेखा की बराबर रेखा खींचना	
३१	एक सीधी रेखा और एक बिंदु	उस बिंदु से उस सीधी रेखा की समानान्तर रेखा खींचना	
३	दो छोटी बड़ी सीधी रेखा	बड़ी सीधी रेखा में से छोटी सीधी रेखा के बराबर काटना	
१०	एक सीधी रेखा	उस रेखा के दो बराबर हिस्से करना	
११ अध्याय २	एक सीधी रेखा	उस सीधी रेखा के ऐसे दो हिस्से करना कि घरातल कुल सीधी रेखा और एक हिस्से का बराबर हो दूसरे हिस्से पर के बनें	

### सरलकोन

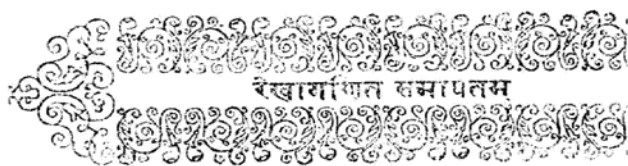
२३	एक सरल कोन और एक सीधी रेखा और उसमें एक बिंदु	उस रेखा के उस बिंदु पर उस कोन के बराबर कोन बनाना	
६	एक सरलकोन	उस कोन के दो बराबर हिस्से करना	
११	एक सीधी रेखा और उसमें एक बिंदु	उस बिंदु से एक समी सीधी रेखा	

( २२३ )

नम्बरसाध्य	कल्पित अर्थ	फल
१२	एक अपरमित सीधी रेखा और उसके बाहर एक बिंदु	खींचनी है कि वह उस रेखा के साथ समकोन बनावे उस बिंदु से उस रेखा पर लंब डालना (त्रिभुज)
१२	तीन सीधी रेखा जिनमें से हर एक दो मिलकर तीसरी से बड़ी है	ऐसा त्रिभुज बनावो कि जिसकी भुज उन रेखाओं के अलग २ बराबर हों
१	एक परमिति सीधी रेखा	उस पर समद्विबाहु त्रिभुज बनाना है (समानान्तर चतुर्भुज)
३२	एक त्रिभुज और एक सरलकोन	त्रिभुज के बराबर एक ऐसा समानान्तर चतुर्भुज बनाना कि उसका एक कोन उस कोन के बराबर हो
३३	एक सीधी रेखा एक त्रिभुज और एक सरलकोन	उस रेखा पर उस त्रिभुज के बराबर ऐसा समानान्तर चतुर्भुज बनाना जिसका एक कोन उस कोन के बराबर होवे
३५	एक ऋजुभुज क्षेत्र और एक सरलकोन	उस ऋजुभुज क्षेत्र के बराबर एक ऐसा समानान्तर चतुर्भुज बनाना कि उसका एक कोन उस कोन के बराबर हो
३५ अनुमान	एक सीधी रेखा और एक ऋजुभुज क्षेत्र और एक सरलकोन	उस रेखा पर उस ऋजुभुज क्षेत्र के बराबर ऐसा समानान्तर चतुर्भुज बनाना कि उसका एक कोन उस कोन के बराबर हो
३६	एक परिमित सीधी रेखा	उस रेखा पर वर्ग बनाना
१४ अध्याय २	एक ऋजुभुज क्षेत्र	उसके बराबर एक वर्ग बनाना

इति





## द्वितीयः

नीचे लिखी हुई किताबें विक्रियायें हमारे पास मौजूद हैं और हर एक किताब की कीमत उसके सामने दर्ज है हिसाब किताब के हिस्से बन्दजिब नये गवर्मेन्ट रजोलियूशन फिर तरमीम किये गये हैं और सवालात सुतफरिक् बढ़ाये गये हैं

मन्वर नाम किताब

कीमत

(१) यूक्लिड (पहिली और दूसरी बुक एक जिल्द में) मौखिक बाबू आत्माराम बी. ए. हैडमास्टर हाई स्कूल अलीगढ़

(२) यूक्लिड (तीसरी और चौथी बुक एक जिल्द में)

(३) तहरीर उक्लूदेस भिकाला अब्बल १५ भिकाला दोयम

(४) तहरीर उक्लूदेस भिकाला अब्बल व दोयम

(५) रेखागणित १ अध्याय १२ अध्याय १ और २ अध्याय

(६) हलउल्लनतायज (उर्दू) जिसमें बाबू आत्माराम बी. ए. तहरीर उक्लूदेस का हल है मौ० बाबू दुर्गा प्रसाद साहू

(७) हलउल्लनतायज हिन्दी जिसमें रेखा गणित का हल है

(८) हिसाब किताब (उर्दू) कुल १ जिल्द में मौ० बाबू आत्माराम बी. ए.

(९) हिसाब किताब (हिन्दी)

(१०) हिसाब किताब (उर्दू) १ हिस्सा (११) हिसाब किताब हिन्दी १ हिस्सा

(१२) " २ " " १३ (१३) " २ " "

(१४) " ३ " " १५ (१५) " ३ " "

(१६) " ४ " " १७ (१६) " ४ " "

(१८) " ५ " " १९ (१८) " ५ " "

(१९) " ६ " " २० (१९) " ६ " "

जो साहब पांच रुपये या ज़ियादा की किताबें खरीदेंगे उन कोमीशन दस फीसदी और जो दस रुपये या ज़ियादा की खरीदेंगे उनको बीस फीसदी के हिसाब से काट दिया जायगा महमूल व ज़िम्मे खरीदार है सिवाय हैडमास्टरान ज़िला स्कूल व डिप्टी इस्पेक्टरान मदारिस के सब खरीदारों से कीमत नक़द ली जायेगी व हैडमास्टरान व डिप्टी इस्पेक्टरान की कीमत अदा करने के लिये भाद की मौजुदत है

लक्ष्मीनारायण शर्मा

नाज की खिड़की आगरा

